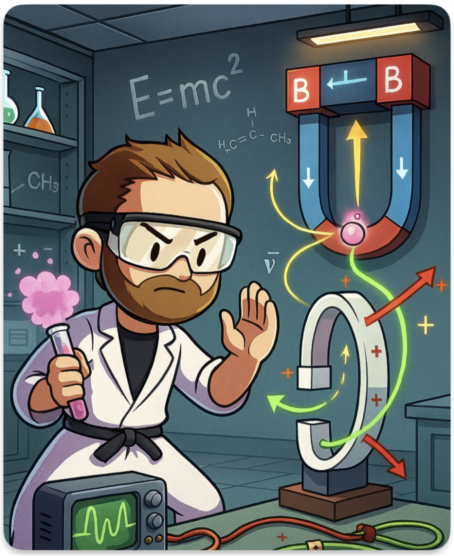
Mouvement dans un champ uniforme

Cours

v1.0

Lycée de Cachan – 63 Avenue du Président Wilson 94230 Cachan - Académie de Créteil



Compétences visées:

- Montrer que le mouvement dans un champ uniforme est plan.
- Établir et exploiter les équations horaires du mouvement.
- Établir l'équation de la trajectoire.
- Discuter de l'influence des grandeurs physiques sur les caractéristiques du champ électrique créé par un condensateur plan, son expression étant donnée.
- Exploiter la conservation de l'énergie mécanique ou le théorème de l'énergie cinétique dans le cas du mouvement dans un champ uniforme.

Exercices :

1. Étude du vol d'une balle de golf - *Bac Polynésie 2023*
2. Le scanner à rayon X - *Bac Réunion 2023*
3. Accélération linéaire de particules chargées

Table des matières

I Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

A Mise en équation du problème

On considère un objet M de masse m lancé dans un champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_y}$. Le système est soumis uniquement à son poids : $\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{g}$.

Methode : Application de la méthode de résolution

1. **Système :** Objet M, de masse m, ponctuel
2. **Référentiel :** Terrestre, supposé Galiléen
3. **Bilan des forces :** Poids, $\overrightarrow{P}$, vertical vers le bas, tel que : $\overrightarrow{P} = m.\overrightarrow{g}$

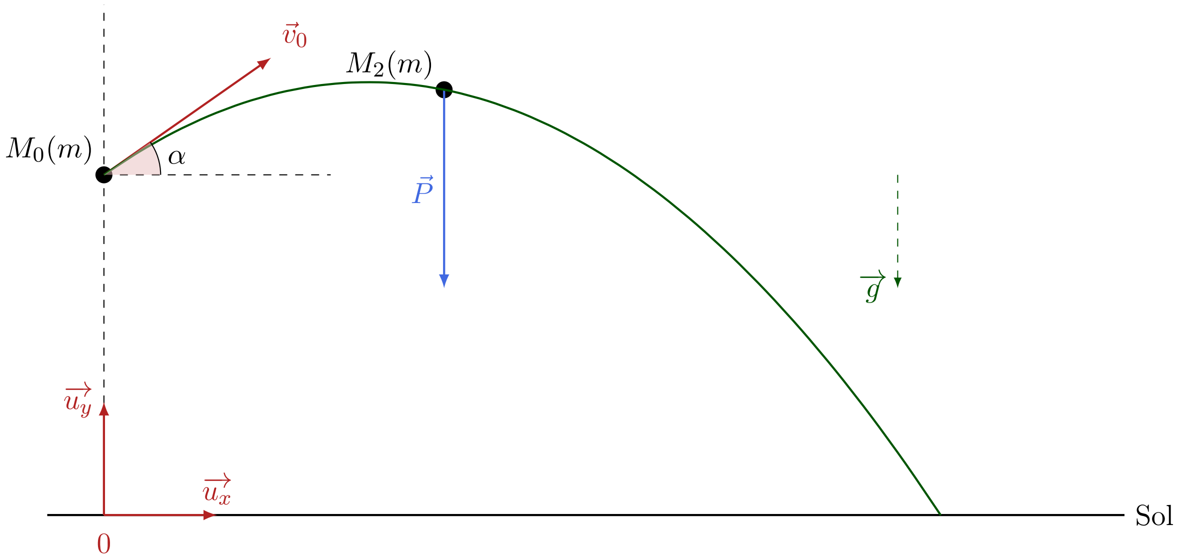


FIGURE 1 – Tir parabolique depuis une hauteur initiale h avec un angle de tir α

D'après la deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad a_x\,\overrightarrow{u_x} + a_y\,\overrightarrow{u_y} = 0\,\overrightarrow{u_x} - g\,\overrightarrow{u_y} \quad \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{a} = \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}}$$

Le mouvement se déroule dans un **plan** (ici, le plan (x, y)), car l'accélération est **constante et dirigée selon** $\overrightarrow{u_y}$.

Propriété : Mouvement plan

Un objet lancé dans un champ de pesanteur uniforme, avec une vitesse initiale quelconque, décrit un mouvement plan.

B Équations horaires

B-1 Équation horaire de la vitesse

Rappel

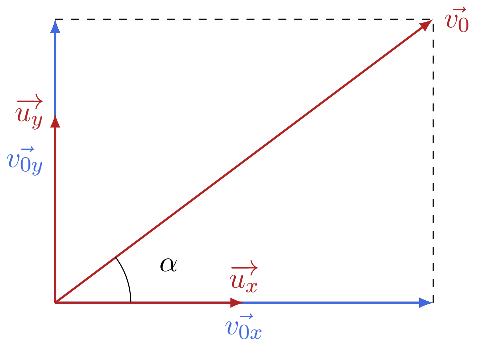
Le lien entre l'accélération et la vitesse est défini dans le chapitre **Cinématique du point**.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{alors} \quad \vec{v} = \int \vec{a}.dt$$

En intégrant l'accélération on obtient :

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = \int 0.dt = v_{0x} \\ v_y(t) = \int -g.dt = -g.t \ + \ v_{0y} \end{cases}$$

Il faut maintenant déterminer les constantes d'intégration v_{0x} et v_{0y}. Pour cela on se place aux **conditions initiales**.
Il faut donc exprimer le vecteur vitesse initial $\vec{v_0}$ suivant les coordonnées du repère $\vec{u_x}, \vec{u_y}$:



$$\begin{cases} cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{v_{0x}}{v_0} \\ sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{v_{0y}}{v_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = v_0.cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0.sin(\alpha) \end{cases}$$

D'où :

$$\vec{v_0} = \begin{cases} v_{0x} = v_0 cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0 sin(\alpha) \end{cases}$$

On peut donc finir en trouvant l'expression de **l'équation horaire de la vitesse :**

$$\boxed{\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = v_0.cos(\alpha) \\ v_y(t) = vo.sin(\alpha) \end{cases}}$$

B-2 Équation horaire de la position

Rappel

Le lien entre la et la position est défini dans le chapitre **Cinématique du point**.

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{OM} = \int \vec{v}.dt$$

En intégrant la vitesse, on obtient :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0.cos(\alpha).t \ + \ x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 \ + \ v_0.sin(\alpha).t \ + \ y_0 \end{cases}$$

Il faut maintenant déterminer les constantes d'intégration x_0 et y_0. Pour cela on se place aux **conditions initiales**.
Au moment du lancé, la hauteur initiale est non nulle et notée h. En revanche, la position sur l'axe des abscisses est égale à 0.

Ainsi :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{cases} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0.cos(\alpha).t \\ y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 \ + \ v_0.sin(\alpha).t \ + \ h \end{cases}}$$

C Équation de la trajectoire

Définition : Equation de la trajectoire

L'équation de la trajectoire d'un point matériel est une relation mathématique entre les coordonnées de position qui ne font pas intervenir explicitement le temps. **Pour la trouver à partir des équations horaires, il faut effectuer un changement de variable**.

Nous voulons $y(x)$ a partir de $x(t)$ et $y(t)$, pour cela nous devons trouver l'expression du temps t en fonction de $x(t)$ ou de $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = v_0.cos(\alpha).t \\ y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 \ + \ v_0.sin(\alpha).t \ + \ h \end{cases} \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0.cos(\alpha)}$$

Donc en injectant, l'expression de t dans $y(t)$, on obtient :

$$y(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0.cos(\alpha)}\right)^2 + v_0.sin(\alpha).\frac{x}{v_0.cos(\alpha)} + h$$

En simplifiant par : $tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0.cos(\alpha)}\right)^2 + tan(\alpha).x + h}$$

D Calcul de la flèche et de la portée

D-1 La portée

Définition : La portée

La portée x_P est la distance parcourue horizontalement par le système jusqu'au point P où il atteint le sol.

Methode : Trouver la portée

x_P est solution de l'équation du second degré $y(x) = 0$. Il faut donc résoudre un polynôme du seconde degré.

Rappel

Une équation du second degré s'écrit sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

D-2 La flèche

Définition : La flèche

La flèche est le point S correspondant au point le plus haut atteint par le système au cours de son mouvement. En ce point S, le vecteur vitesse est horizontal.

Methode : Trouver la flèche

- Résoudre l'équation $v_y(t) = 0$ pour trouver l'instant t_S où la vitesse verticale s'annule (le système atteint son point le plus haut).
- Injecter cette valeur t_S dans les équations horaires du mouvement pour déterminer les positions horizontale et verticale x_S et y_S correspondantes.

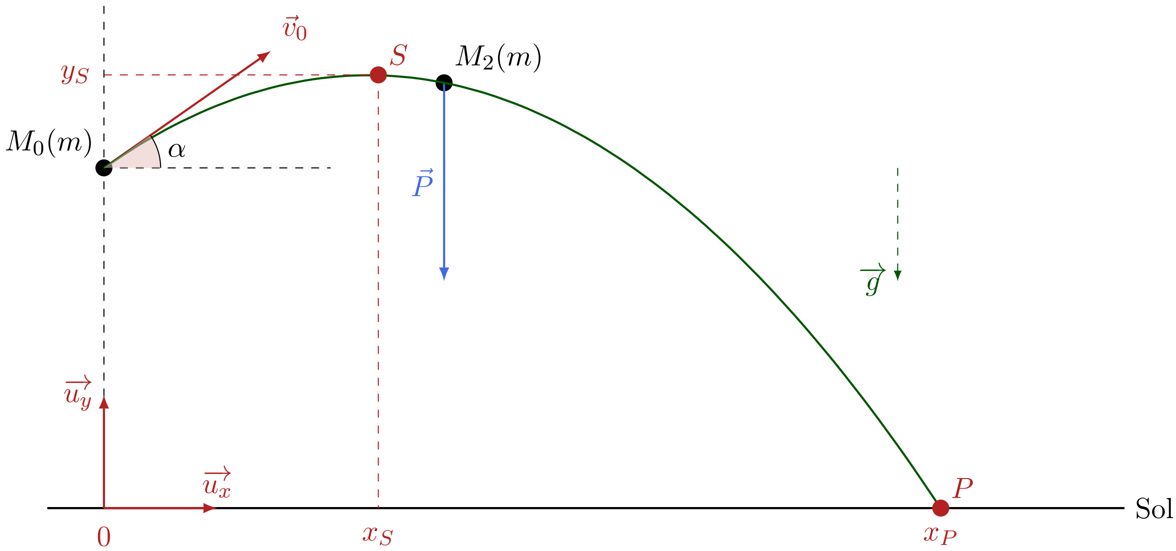


Figure 2 – Flèche et portée

Exercice 1 **Étude du vol d'une balle de golf - *Bac Polynésie 2023*** (★ ★)

Les systèmes robotisés peuvent permettre aux personnes à mobilité réduite de pratiquer des sports et loisirs qui leur étaient, jusqu'à récemment, totalement inaccessibles.

La société allemande Ottobock, spécialisée dans les aides à la pratique du sport pour personnes handicapées, a mis au point un fauteuil roulant destiné aux golfeurs pour qu'ils puissent plus facilement effectuer leur swing, mouvement permettant de frapper la balle avec la tête du club.

FIGURE 3 – *https ://www.eazilee.com/*

L'objectif de cet exercice est d'étudier le vol d'une balle de golf frappée par un joueur handicapé, et de déterminer comment il doit adapter son geste pour que la balle retombe au plus près du drapeau visé. Le système étudié est la balle assimilée à un point matériel G de masse $m = 46g$, initialement posée au sol et coïncidant avec l'origine d'un repère $(0, x, y)$ tel que représenté ci-dessous :

FIGURE 4 – Schéma du système d'étude dans son repère

Afin de simplifier l'étude, on considérera que :
- à la date $t = 0\ s$, la tête du club de golf communique à la balle une vitesse initiale notée v_0 dont la direction fait un angle $\alpha_0 = 40$ par rapport à l'horizontale ;
- lors de son vol, la balle n'est soumise qu'à son poids et évolue dans un champ de pesanteur terrestre considéré comme uniforme, d'intensité $g = 9,81\ N.kg^{-1}$

Le mouvement de la balle sera étudié dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Q1 Déterminer l'expression des coordonnées a_x et a_y de l'accélération $\overrightarrow{a}$ de la balle lors du vol.

Q2 En explicitant le raisonnement, déterminer les équations horaires de la vitesse puis celles de la position de la balle.

Q3 Montrer que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme :

$$y(x) = (A \cdot x + B) \cdot x$$

où A et B sont des constantes dont les expressions sont :

$$A = \frac{-g}{2(v_0.cos(\alpha_0))^2} \qquad B = tan(\alpha_0)$$

On admettra que le golfeur est capable, avec le club utilisé, de communiquer à la balle une vitesse initiale de valeur maximale $v_{0max} = 27\ m.s^{-1}$. On parle alors d'un **plein coup**.

Q4 Déterminer les valeurs des constantes A et B pour cette valeur maximale de vitesse initiale.

Suite à un **plein coup**, la balle retombe au sol à une distance maximale. Le golfeur peut adapter son geste afin que la portée du tir soit plus faible. On parle par exemple d'un « quart de coup » lorsque

la distance vaut un quart de la distance maximale, d'un « demi-coup » lorsque la distance parcourue vaut la moitié de la distance maximale et ainsi de suite.
Le golfeur souhaite que sa balle retombe 3,0 mètres avant un drapeau situé à 60 m de la frappe.

Q5 Déterminer si le joueur doit jouer un plein coup, un trois-quarts de coup, un demi-coup ou bien un quart de coup, en considérant que l'angle de décollage conserve la même valeur $\alpha_0 = 40$ quel que soit le coup réalisé avec ce club.

Les candidats sont invités à prendre des initiatives, notamment sur les valeurs numériques éventuellement manquantes, et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti.

II Mouvement dans un champ électrique uniforme

A Champ électrique uniforme entre deux armatures planes

Propriété : Champ électrique dans un condensateur plan

Un condensateur plan est composé de deux plaques planes parallèles, de longueur L et séparées d'une distance d. L'une est chargée positivement et l'autre négativement. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ généré entre les deux plaques est orienté de la plaque positive vers la négative.

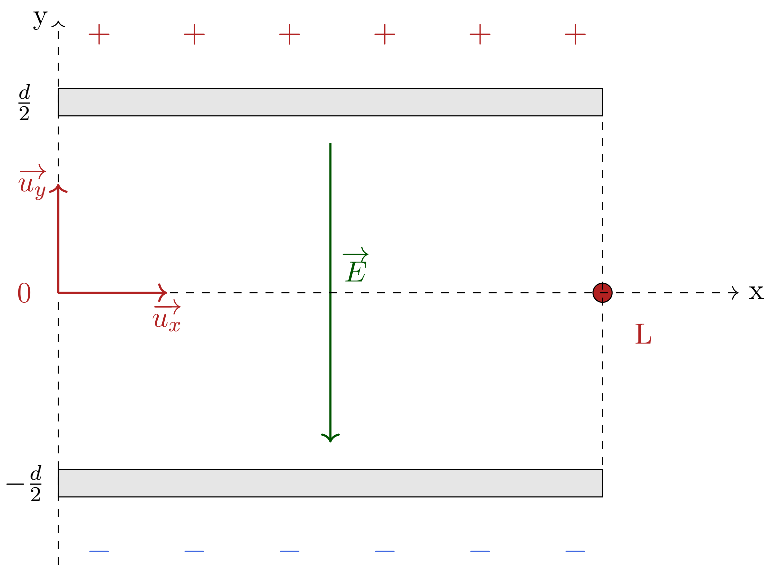


FIGURE 5 – Champ électrique entre deux armatures planes.

Définition : Champ électrique $\overrightarrow{E}$

Soit un condensateur composé de deux plaques planes distantes de d, alimenté par une tension constante U (en V) à ses bornes. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé entre les deux armatures du condensateur est constant, avec une norme E (en $V.m^{-1}$) :

$$E = \frac{U}{d}$$

B Mise en équation du problème

On considère une particule de charge q et de masse m placée dans un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E} = -E\ \overrightarrow{u_y}$, créé par un condensateur plan. Elle est lâchée avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\ \overrightarrow{u_x}$.

Methode : Application de la méthode de résolution

1. **Système :** Particule de charge q, de masse m.
2. **Référentiel :** Terrestre, supposé Galiléen
3. **Bilan des forces :** Force électrique, $\overrightarrow{F_E} = q.\overrightarrow{E}$, verticale, vers le bas.

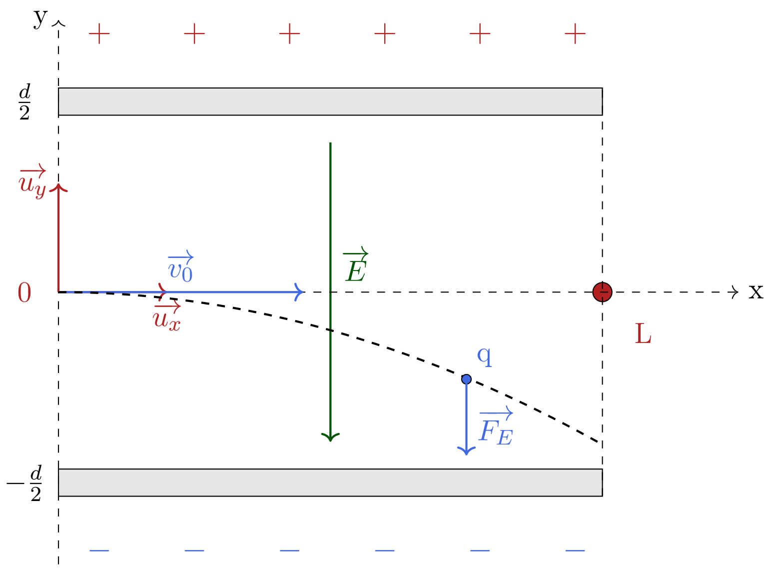


FIGURE 6 – Schéma de la particule chargée dans le champ électrique.

D'après la deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = q.\overrightarrow{E} \quad \Rightarrow \quad a_x\ \overrightarrow{u_x} + a_y\ \overrightarrow{u_y} = 0\ \overrightarrow{u_x} - \frac{q.E}{m}\ \overrightarrow{u_y} \quad \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -\frac{q.E}{m} \end{cases}}$$

C Équations horaires

C-1 Équation horaire de la vitesse

En intégrant l'accélération on obtient :

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = \int 0.dt = v_{0x} \\ v_y(t) = \int -\frac{q.E}{m}.dt = -\frac{q.E}{m}.t\ +\ v_{0y} \end{cases}$$

Il faut maintenant déterminer les constantes d'intégration v_{0x} et v_{0y}. Pour cela on se place aux **conditions initiales**.
Il faut donc exprimer le vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ suivant les coordonnées du repère $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}$.

$$\text{Or : } v_o = v_0\ \overrightarrow{u_x}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -\frac{q.E}{m}.t \end{cases}}$$

C-2 Équation horaire de la position

En intégrant la vitesse, on obtient :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0.t \ + \ x_0 \\ y(t) = -\frac{q.E}{m}.t^2 \ + \ y_0 \end{cases}$$

Il faut maintenant déterminer les constantes d'intégration x_0 et y_0. Pour cela on se place aux **conditions initiales**.
Au moment du lancé, la hauteur initiale ainsi que la position horizontale sont nulles.

Ainsi :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0.t \\ y(t) = -\frac{q.E}{2.m}.t^2 \end{cases}}$$

Exercice 2 **Le scanner à rayon X - *Bac Réunion 2023*** ( )

La radiographie réalisée par un scanner à rayons X est une technique d'imagerie médicale utile dans le diagnostic de nombreuses pathologies. Le scanner crée un faisceau à rayons X à l'aide d'un tube à rayons X ou tube de Coolidge.

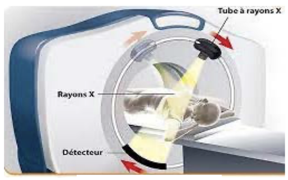


FIGURE 7 – Scanner à rayon X

Dans ce tube à rayons X, une tension élevée U est maintenue entre un filament cathodique, borne négative, et une anode tournante, borne positive. Un courant électrique provoque l'échauffement d'un filament situé à la cathode. L'agitation des électrons présents augmente et une partie d'entre eux est éjectée du filament au point O, avec une vitesse négligeable. La tension U accélère les électrons du point O vers l'anode en tungstène. Devenus très énergétiques, ils frappent l'anode, ce qui produit des rayons X. Pour obtenir ces rayons X, chaque électron doit avoir acquis une énergie cinétique égale à $6,410^{-15}$ J au minimum.

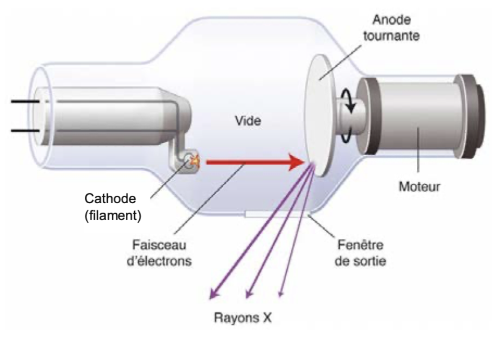


FIGURE 8 – Schéma du tube à rayons X

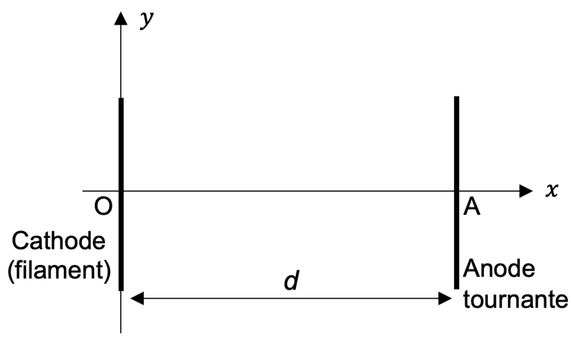


FIGURE 9 – Schéma simplifié

Le but de cet exercice est de calculer la tension minimale à appliquer entre la cathode et l'anode pour que le faisceau d'électrons parvienne à provoquer l'émission de photons X au niveau de l'anode.
On considèrera l'électron comme système d'étude assimilé à un point matériel dont on négligera le poids.
Son mouvement sera étudié dans un référentiel terrestre considéré comme galiléen. À l'instant initial, l'électron est situé au point O et sa vitesse est considérée comme nulle.

Données

- Masse de l'électron : $m = 9,1.10^{-31}\ kg$.
- Charge de l'électron : $q = -e = -1,6.10^{-19}\ C$

Q1 Reproduire la figure puis tracer, entre la cathode et l'anode, sans souci d'échelle :

- le vecteur champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}$,
- la force $\overrightarrow{F}$ que subit un électron placé en un point de l'axe (Ox).

Q2 Exprimer le vecteur force $\overrightarrow{F}$ en fonction de la charge e de l'électron et du champ électrique $\overrightarrow{E}$.

Q3 Montrer que les coordonnées du vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ de l'électron dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont :

$$a_x = \frac{e \cdot U}{m \cdot d}, \qquad a_y = 0$$

où :

- e est la charge élémentaire (valeur positive),
- U est la tension entre les plaques,
- m est la masse de l'électron,
- d est la distance entre la cathode et l'anode.

Q4 En déduire la composante $v_x(t)$ du vecteur vitesse, puis la position $x(t)$ en fonction du temps, en supposant que l'électron est initialement au repos :

$$v_x(t) = \frac{eU}{md} \cdot t, \qquad x(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{eU}{md} \cdot t^2$$

Q5 Exprimer littéralement t_A, l'instant auquel l'électron atteint l'anode (au point A tel que $x = d$).

Q6 En déduire l'expression de la vitesse de l'électron lorsqu'il atteint l'anode :

$$v_A = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

Q7 Trouver la tension minimale U_{min} à appliquer entre la cathode et l'anode pour que le faisceau d'électrons provoque l'émission de rayons X au niveau de l'anode.

Les candidats sont invités à prendre des initiatives, notamment sur les valeurs numériques éventuellement manquantes, et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti.

III Aspects énergétiques

A Énergie cinétique

Définition :

Énergie cinétique
L'énergie cinétique d'un objet est l'énergie qu'il possède en raison de son mouvement. Elle dépend de sa masse et de sa vitesse.

Formule :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

où :

- E_c est l'énergie cinétique (en joules, J),
- m est la masse de l'objet (en kilogrammes, kg),
- v est la norme de la vitesse de l'objet (en mètres par seconde, $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

B Énergies potentielles

Définition : Énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur d'un objet est liée à sa position dans un champ de pesanteur. Elle dépend de son altitude par rapport à un niveau de référence.

Formule :

$$E_{pp} = mgz$$

où :

- E_{pp} est l'énergie potentielle de pesanteur (en joules, J),
- m est la masse de l'objet (en kg),
- g est l'intensité du champ de pesanteur (en $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$, typiquement 9,81 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ sur Terre),
- z est l'altitude de l'objet par rapport au niveau de référence (en mètres, m).

Définition : Énergie potentielle électrique

L'énergie potentielle électrique d'une charge dans un champ électrostatique est liée à sa position par rapport aux autres charges ou au potentiel électrique.

Formule :

$$E_{pe} = qU$$

où :

- E_{pe} est l'énergie potentielle électrique (en joules, J),
- q est la charge électrique (en coulombs, C),
- U est la tension électrique entre deux points (en volts, V).

C Énergie mécanique et lois de conservations

C-1 Conservation de l'énergie mécanique

Définition : Énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système est la somme de son énergie cinétique et de ses énergies potentielles (pesanteur, électrique...).

Formule générale :

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe}$$

où :
- E_m est l'énergie mécanique (en J),
- E_c, E_{pp}, E_{pe} sont respectivement les énergies cinétique, potentielle de pesanteur et potentielle électrique.

Dans certains cas, seule une ou deux formes d'énergie sont présentes selon le contexte.

C-2 Théorème de l'énergie cinétique

Propriété : Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Entre deux instants t_1 et t_2, la variation de l'énergie cinétique d'un objet de masse m est égale à la somme des travaux des forces extérieures :

$$E_c(t_2) - E_c(t_1) = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}})$$

Cas d'un mouvement rectiligne dans un champ électrique uniforme :

$$\Delta E_c = qU$$

où :
- ΔE_c est la variation d'énergie cinétique (en J),
- q est la charge de la particule (en C),
- U est la tension électrique (en V).

Exercice 3 Accélération linéaire de particules chargées (★★)

Un électron est accéléré entre 2 armatures chargées séparées d'une distance d. Les armatures sont mises sous tension via un générateur qui délivre $10^4\ V$. L'électron est inséré avec une vitesse initiale horizontale $v_0 = 2.10^5\ m.s^{-1}$.

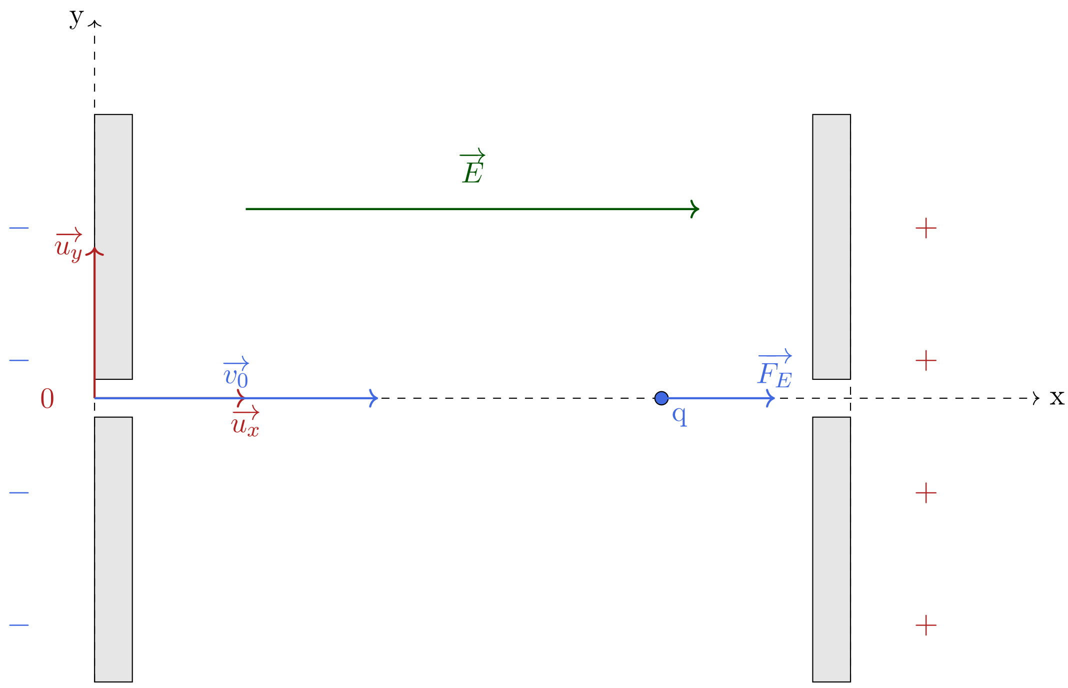


FIGURE 10 – Schéma de la situation

Q1 Calculer sa vitesse de sortie.

Données

- La masse d'un proton est : $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$
- La charge électrique d'un proton est : $q_p = +e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$