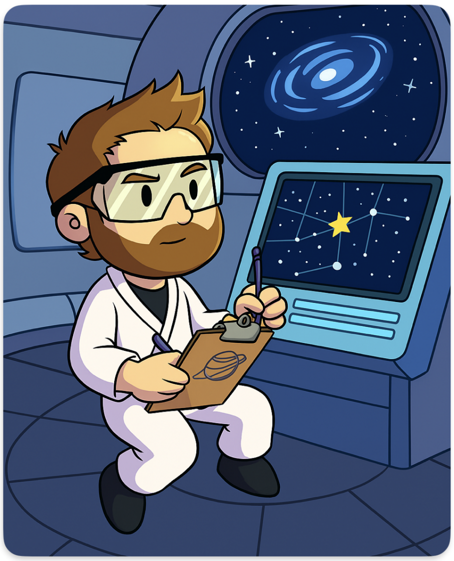
Mécanique Céleste

Cours

v1.0

Lycée de Cachan – 63 Avenue du Président Wilson 94230 Cachan - Académie de Créteil



Compétences visées:

- Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.
- Établir et exploiter les équations horaires du mouvement.
- Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.
- Traiter le cas du satellite géostationnaire.

Exercices :

1. Un satellite en orbite
2. Vers l'ISS - *Bac Mayotte Liban 2021*
3. Le destin funeste de Kepler B - *Bac Métropole 2025*

Table des matières

I Mouvement d'un satellite

A Rappels importants

A-1 Repère de Frenet et vecteur accélération

Rappel

Le repère de frenet correspond au repère $(M, \overrightarrow{u_\tau}, \overrightarrow{u_n})$ avec :

- Vecteur unitaire tangentiel $\overrightarrow{u_\tau}$ tangent à la trajectoire orienté dans le sens du mouvement.
- Vecteur unitaire normal $\overrightarrow{u_n}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{u_\tau}$, orienté vers l'intérieur de la courbure.

Dans ce repère, le vecteur accélération possède deux composantes.

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{dv}{dt}\,\overrightarrow{u_\tau} + \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{u_n} = \begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{v^2}{R} \end{pmatrix}$$

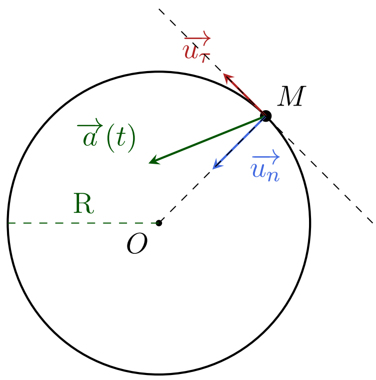


FIGURE 1 – Repère de Frenet

A-2 Force de gravitation

Définition : Force gravitationnelle

La force gravitationnelle est une interaction attractive exercée entre deux corps ayant une masse. Elle est modélisée par la loi de Newton :

$$\overrightarrow{F} = G\frac{m_A m_B}{d^2}\,\vec{u}$$

où :

- G est la constante gravitationnelle ($G \approx 6{,}674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$) ;
- m_A et m_B sont les masses des deux corps ;
- d est la distance qui les sépare ;
- $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dirigé de l'un vers l'autre.

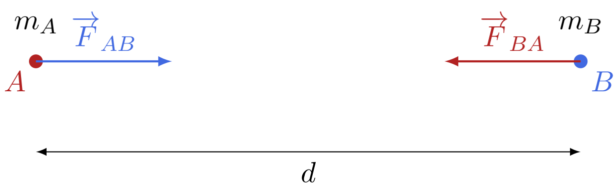


FIGURE 2 – Force gravitationnelle entre deux masses

Cette force est toujours **attractive** et de **même intensité** pour les deux objets, mais de **sens opposé**.

A-3 2nd loi de Newton

Définition : Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel Galiléen, la masse totale d'un système (m) multipliée par l'accélération de son centre de masse ($\overrightarrow{a}$) et la résultante des forces extérieures s'appliquant au système $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}}$ sont égales.
Mathématiquement :

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m \times \overrightarrow{a}$$

B Application au satellite

Exercice 1 **Un satellite en orbite** (★★)

Un satellite de masse m est en **orbite circulaire** autour de la Terre. Il se situe à une distance d du centre de la Terre, et il est **soumis uniquement à la force gravitationnelle**. On note M_T la masse de la Terre et G la constante universelle de gravitation. On suppose que le mouvement du satellite est **circulaire et uniforme**. Le vecteur vitesse instantanée du satellite est noté $\overrightarrow{v_s}$.

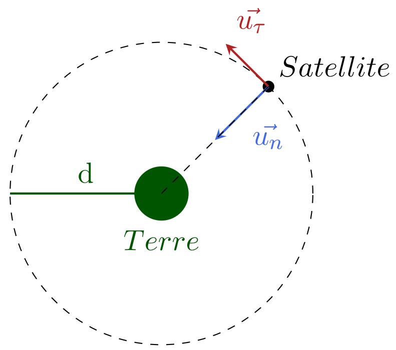


FIGURE 3 – Satellite en orbite circulaire autour de la Terre

Q1 Décrire qualitativement la trajectoire du satellite ainsi que les directions des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet.

Q2 Donner l'expression du vecteur accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, dans le repère de Frenet.

Q3 Donner l'expression de la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite.

Q4 En déduire l'expression vectorielle de la force gravitationnelle dans le repère de Frenet.

Q5 Appliquer la seconde loi de Newton au satellite dans le repère de Frenet.

Q6 En déduire une expression de la norme de la vitesse v_s du satellite en fonction de G, M_T et d.

Q7 En déduire une expression de la période T de révolution du satellite.

Q8 Conclure en interprétant qualitativement l'influence de la distance d sur la vitesse et sur la période orbitale.

II Les lois de Kepler

A La loi des orbites

Définition : Première loi de Kepler (loi des orbites)

Dans le système solaire, les planètes (ou satellites) décrivent des trajectoires elliptiques autour du Soleil (ou de l'astre attracteur), qui occupe l'un des foyers de l'ellipse.

Cela signifie que la distance entre l'objet en mouvement et le Soleil n'est pas constante.

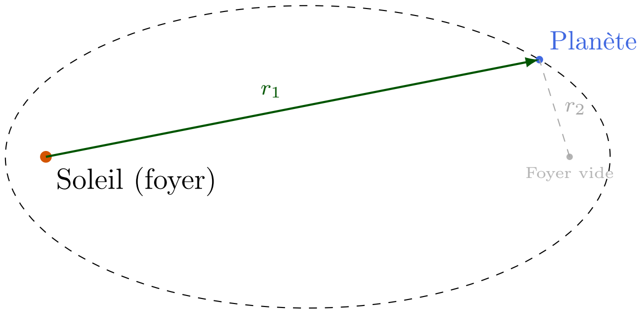


FIGURE 4 – Trajectoire elliptique, Soleil en foyer

B La loi des aires balayées

Définition : Deuxième loi de Kepler (loi des aires)

Le rayon vecteur reliant une planète (ou un satellite) à l'astre attracteur balaie **des aires égales pendant des durées égales.**

Autrement dit, le mouvement est plus rapide quand l'objet est proche de l'astre, et plus lent lorsqu'il en est éloigné.

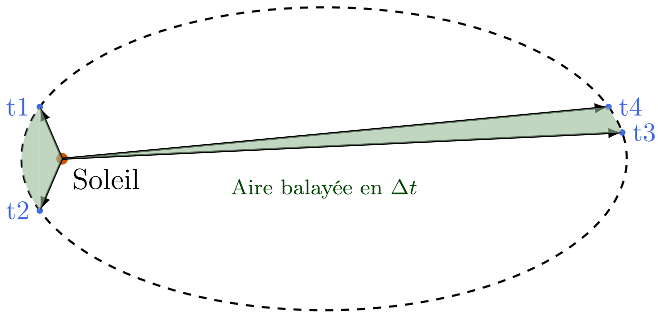


FIGURE 5 – Schéma illustrant la loi des aires

C La loi des périodes

Démonstration : Loi des périodes

Exercice 2 Vers l'ISS - *Bac Mayotte Liban 2021* (★)

Après plusieurs heures, les éléments d'étage de d'une fusée sont abandonnés et la capsule *Crew Dragon* finalise son approche vers la station ISS et s'y amarre automatiquement.

Données

- Rayon moyen de la Terre : $R_T = 6{,}38 \times 10^6\,\mathrm{m}$;
- Masse de la Terre : $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$;
- Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$;
- Altitude moyenne de l'ISS : $h = 400\,\mathrm{km} = 4{,}00 \times 10^5\,\mathrm{m}$.

Q1 En appliquant la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$$

où $r = R_T + h$ est le rayon de l'orbite de la station ISS, exprimer puis calculer la période de révolution T de l'ISS.

Q2 Exprimer puis calculer la valeur de la vitesse v de la station sur son orbite en supposant un mouvement circulaire uniforme.

Exercice 3 Le destin funeste de Kepler B - *Bac Métropole 2025* (★ ★ ★)

L'exoplanète Kepler-1658b est la toute première exoplanète observée par le télescope spatial Kepler. Elle se trouve sur une orbite très proche de son étoile (le rayon de l'orbite est estimé à 7,25 millions de kilomètres), ce qui fait que la température de la planète est très élevée. C'est la première fois que des astronomes découvrent une exoplanète comme Kepler-1658b et son destin tragique : elle va tellement s'approcher de son étoile qu'elle finira par s'y écraser, signant ainsi sa complète destruction.
D'après *Science&Vie le 2 janvier 2023*

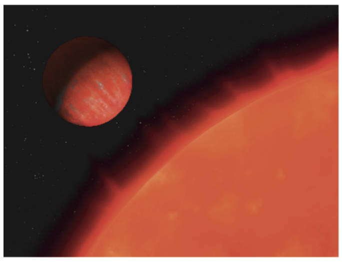


FIGURE 6 – Vue d'artiste - *Science & Vie le 2 janvier 2023*

Et si elle se rapproche toujours au même rythme de son étoile, elle entrera en collision avec celle-ci dans près de trois millions d'années.
D'après *https ://www.futura-sciences.com/*

L'objectif de l'exercice est de modéliser le mouvement de la planète Kepler-1658b tout d'abord au cours d'une révolution, puis sur une échelle de temps plus longue.

Données

- Masse de la planète Kepler-1658b : $m_P = 1{,}12 \times 10^{28}\,\mathrm{kg}$;
- Masse de l'étoile Kepler-1658 : $m_E = 2{,}88 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$;
- Période de révolution de la planète en 2023 : $T = 3{,}85\,\mathrm{jours}$;
- Constante gravitationnelle universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot kg^{-2} \cdot m^2}$;
- Rappel : $\sqrt[3]{A} = A^{1/3}$.

La planète Kepler-1658b est assimilée à son centre de masse, P, dans le référentiel centré sur l'étoile Kepler-1658 et dont les axes pointent vers trois étoiles lointaines de directions à peu près constantes. On suppose ce référentiel galiléen au regard des durées et des distances mises en jeu.
Dans un premier temps, on modélise la trajectoire de P par un cercle dont le rayon est noté r et dont le centre correspond au centre de masse de l'étoile, noté E.

Q1 Dans l'hypothèse d'un mouvement circulaire, schématiser la trajectoire de P autour de E sans souci d'échelle. Représenter le repère de Frenet associé à la planète en indiquant les vecteurs unitaires $(\overrightarrow{u_\tau}, \overrightarrow{u_N})$ constituant la base de ce repère.

Q2 En appliquant la deuxième loi de Newton à la planète, exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_P$ en fonction de G, m_E, r (rayon de l'orbite), et de la base de Frenet.

Q3 En supposant un mouvement circulaire uniforme, montrer que la norme de la vitesse de la planète est donnée par :

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}}$$

Q4 En notant T la période de révolution, montrer que le rayon de l'orbite vérifie la relation :

$$r^3 = \frac{G m_E T^2}{4\pi^2}$$

Q5 Déterminer la valeur de r à l'aide des données fournies, et la comparer avec celle indiquée dans l'article de Science & Vie.

Q6 En décembre 2022, une équipe d'astronomes a montré que la période de révolution de Kepler-1658b diminuait de 131 ms par année terrestre. En supposant cette diminution constante, vérifier que la période diminue de $\Delta T = 1{,}38\,\mathrm{ms}$ à chaque révolution.

Q7 Comparer cette diminution ΔT avec la valeur de la période T, et justifier que celle-ci peut être considérée comme constante pour un faible nombre de révolutions.

Q8 En vous appuyant sur la relation de la question 4 (loi de Kepler : $r^3 \propto T^2$), déterminer qualitativement si le rayon de l'orbite augmente ou diminue légèrement à chaque révolution.

Pour un grand nombre de révolutions, le mouvement de la planète Kepler-1658b peut être modélisé par une succession de trajectoires circulaires dont le rayon diminue à chaque révolution.

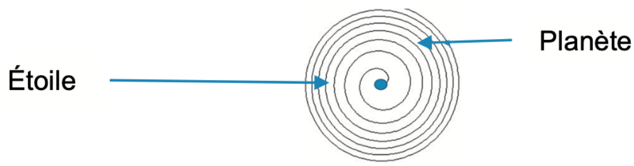


Figure 7 – Représentation fictive de la trajectoire d'une planète qui « tomberait » sur son étoile

Q9 Le calcul de la période de révolution de la planète juste avant l'impact prévoit une valeur beaucoup plus faible : $T_{\text{final}} = 1600\,\text{s}$, contre $T_{2023} = 3{,}85\,\text{jours}$ en 2023. En considérant que la période diminue de manière constante à raison de $\Delta T = 131\,\text{ms/an}$, confirmer la prévision suivante :

> « Si elle se rapproche toujours au même rythme, elle entrera en collision avec son étoile dans près de trois millions d'années. »

Le candidat est invité à prendre des initiatives personnelles, à justifier ses choix, et à expliciter sa démarche, même si elle n'aboutit pas à un résultat numérique précis.