

## CINÉMATIQUE DU POINT

Cours

v1.0

*Lycée de Cachan – 63 Avenue du Président Wilson 94230 Cachan - Académie de Créteil***Compétences visées:**

- Citer et exploiter les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, dans le cas d'un mouvement circulaire.
- Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré, circulaire, circulaire uniforme.
- Définir le vecteur vitesse comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps et le vecteur accélération comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps.
- Établir les coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération à partir des coordonnées du vecteur position et/ou du vecteur vitesse

**Exercices :**

1. Trajectoire d'un volant de badminton - *Bac Métropole 2023*
2. Vol droit d'un parapente - *Bac Polynésie 2 2022*
3. Le freinage d'un TGV
4. Tracés qualitatif de vecteurs
5. Satellites Starlink - *Bac Métropole 2021*

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Les outils pour décrire un mouvement</b>	<b>3</b>
A	Systèmes et référentiels . . . . .	3
A-1	Système . . . . .	3
A-2	Référentiel . . . . .	4
A-3	Référentiels usuels . . . . .	4
B	Vecteurs . . . . .	5
B-1	Vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ . . . . .	5
B-2	Vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ . . . . .	6
B-3	Vecteur accélération $\overrightarrow{a}(t)$ . . . . .	8
<b>II</b>	<b>Le mouvement rectiligne</b>	<b>9</b>
A	Mouvement rectiligne uniforme . . . . .	9
B	Mouvement rectiligne non uniforme . . . . .	9
B-1	Mouvement rectiligne accéléré . . . . .	9
B-2	Mouvement rectiligne ralenti . . . . .	9
C	Quelques exercices pour s'entraîner . . . . .	10
<b>III</b>	<b>Le mouvement circulaire</b>	<b>11</b>
A	Repère de Frenet . . . . .	11
A-1	Description du repère - Vecteurs unitaires . . . . .	11
A-2	Position, vitesse et accélération . . . . .	12
B	Mouvement circulaire uniforme . . . . .	13

# I Les outils pour décrire un mouvement

## A Systèmes et référentiels

Avant de **décrire le mouvement** d'un objet, il faut définir le **système** étudié et préciser le **référentiel** d'étude.

### A-1 Système

#### Définition : Système d'étude

**Le système est l'objet dont on étudie le mouvement.** Pour simplifier la description, le système est assimilé à un point (noté souvent M ou G) dont la masse se concentre au **centre d'inertie** et reste constante au cours du mouvement.

#### Remarque

Le modèle utilisé en classe de terminale s'appelle le modèle du **point matériel**. Il ne prend en compte ni la géométrie de l'objet, ni ses éventuelles déformations ou rotations. **Il permet uniquement de décrire le mouvement global de l'objet.**

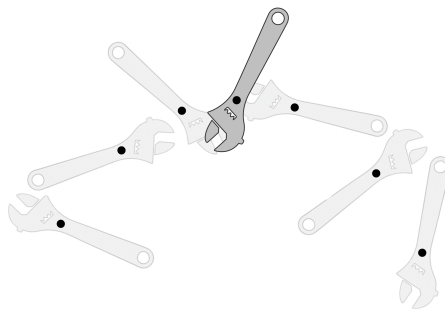


FIGURE 1 – Mouvement réel

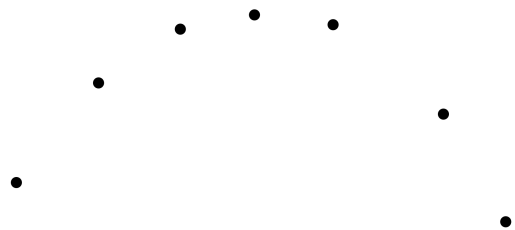


FIGURE 2 – Modèle du point matériel

Avantages du modèle du point	Inconvénients du modèle du point
Simplifie les calculs en ne retenant que les déplacements du centre de masse.	Ignore les effets liés à la rotation ou la forme de l'objet.
Pertinent dans de nombreux cas où l'objet est petit devant les distances parcourues.	Peut donner des résultats faux ou imprécis dans le cas de systèmes complexes.
Facilite l'apprentissage des lois fondamentales du mouvement.	Ne permet pas de traiter les problèmes où le moment d'inertie intervient.

TABLE 1 – Avantages et inconvénients du modèle du point.

#### Attention : Modèle du point matériel

Dans la suite du chapitre, (et de l'année) nous nous placerons dans le modèle du point matériel.

## A-2 Référentiel

### Définition : Référentiel

Le référentiel est le **solide de référence** par rapport auquel on étudie le mouvement d'un système (associé à un repère spatial (pour la position) et un repère de temps). **Le mouvement d'un système dépend du référentiel choisi : il est relatif.**

### Attention :

Il est **impossible** de décrire un mouvement sans référentiel.

### Exemple

Un passager saute verticalement à l'intérieur d'un train qui se déplace en ligne droite à vitesse constante.

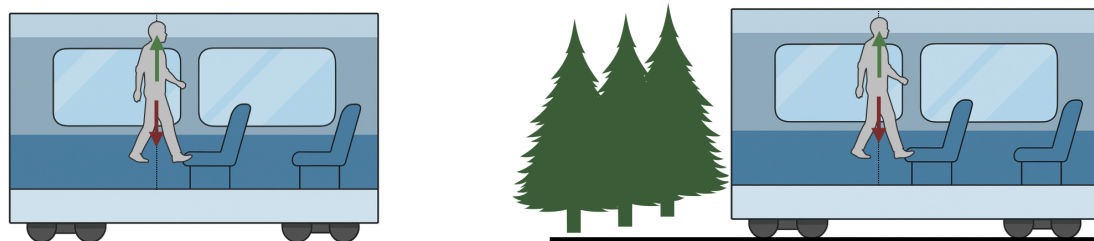


FIGURE 3 – Influence du référentiel

#### Dans le référentiel du train

Le passager **retombe à l'endroit même** d'où il a sauté, car il possède la même vitesse horizontale que le train.

→ Le mouvement est simple à décrire : **une trajectoire verticale.**

#### Dans le référentiel terrestre

On pourrait croire à tort qu'il devrait "retomber derrière lui".

→ Le passager, bien qu'il saute verticalement dans le train, décrit **une trajectoire parabolique.**

## A-3 Référentiels usuels

### Propriété : Le référentiel terrestre

Un point fixe par rapport au sol de la terre auquel on associe un repère dont les axes sont dirigés vers trois étoiles supposées fixes.

### Propriété : Le référentiel géocentrique

Centre de la Terre auquel on associe un repère dont les axes sont dirigés vers trois étoiles supposées fixes.

### Propriété : Le référentiel héliocentrique

Centre du Soleil auquel on associe un repère dont les axes sont dirigés vers trois étoiles supposées fixes.

## B Vecteurs

Un mouvement se caractérise par plusieurs éléments : **une direction, un sens et une distance**. L'outil mathématique le plus adapté pour décrire rigoureusement un mouvement est **le vecteur**.

### B-1 Vecteur position $\vec{OM}(t)$

#### Définition : Le vecteur position $\vec{OM}(t)$

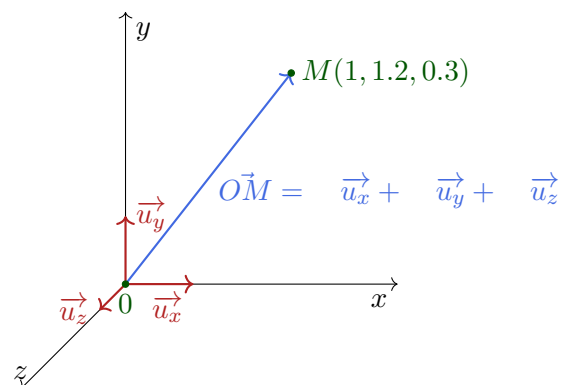
Dans un repère orthonormé  $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , on définit le vecteur position comme suivant :

$$\vec{OM}(t) = x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y + z(t) \vec{u}_z$$

Nous pouvons également l'écrire sous forme de matrice :

$$\vec{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  sont les équations horaires de la position.



#### Remarque

Dans la très grande majorité des exercices, **seuls les mouvements dans un plan (2D) sont étudiés**. Le repère utilisé est donc généralement réduit à deux directions parmi les trois de l'espace :  $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ ,  $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  ou  $(0, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , en fonction du plan dans lequel le mouvement se déroule.

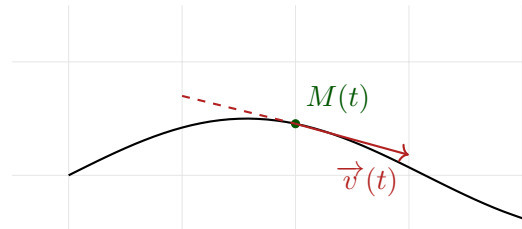
## B-2 Vecteur vitesse $\vec{v}(t)$

### 📖 Définition : Vecteur vitesse instantanée $\vec{v}(t)$

Le vecteur vitesse instantanée  $\vec{v}(t)$  possède les caractéristiques suivantes :

- **Direction** : tangente à la trajectoire ;
- **Sens** : celui du mouvement ;
- **Norme** : valeur  $\|\vec{v}(t)\|$ , appelée vitesse instantanée de formule :

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$



### 🔗 Propriété : Formalisme mathématique

Mathématiquement, le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position  $\vec{OM}(t)$  par rapport au temps :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt}$$

Dans un repère orthonormé 2D, ses coordonnées sont :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

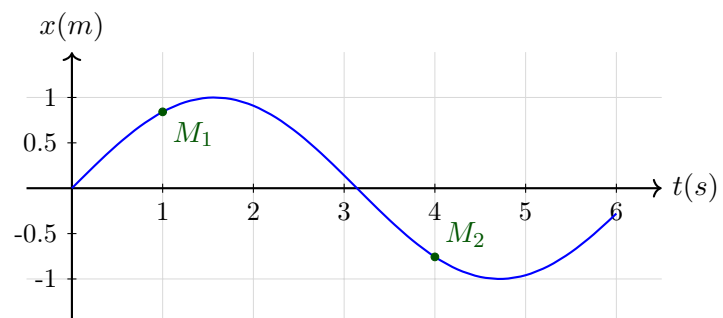
### 💡 Remarque

Nous pouvons déterminer la valeur des composantes  $v_x(t)$  et  $v_y(t)$  graphiquement.

### 🔧 Methode : Trouver le vecteur vitesse graphiquement

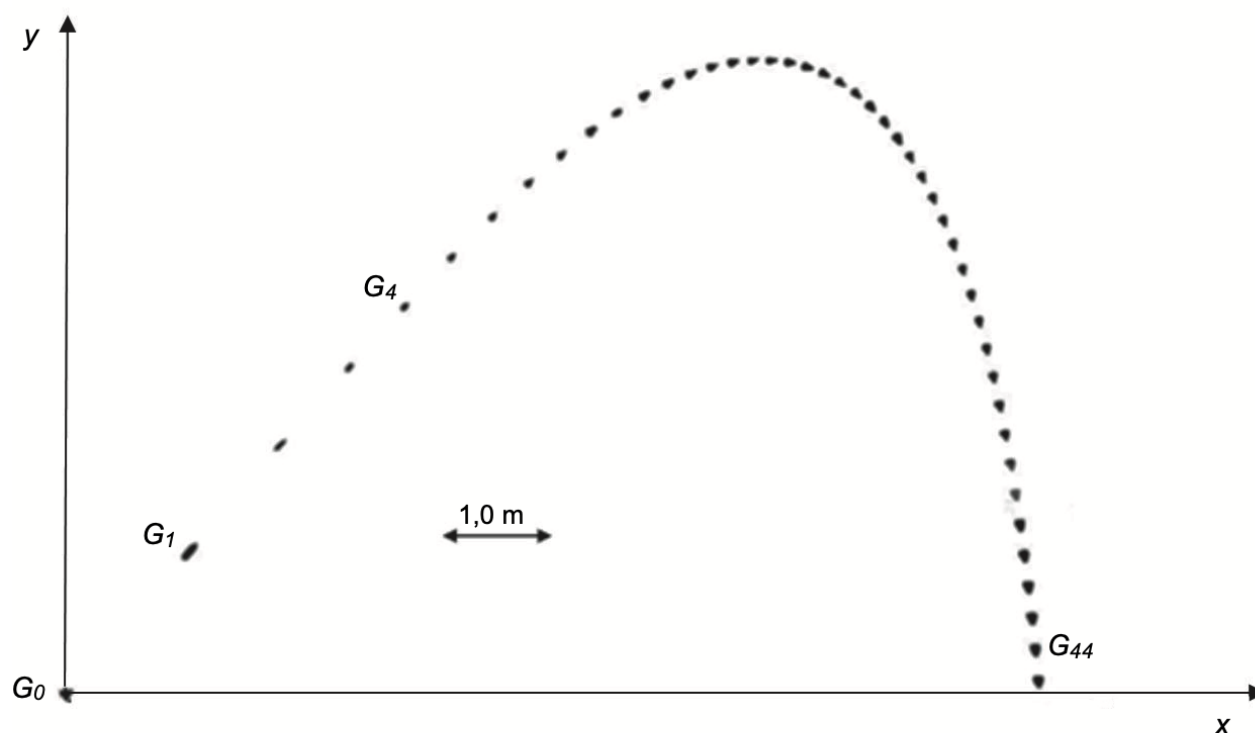
1. On trace la tangente au point d'intérêt.
2. On place deux points  $(A, B)$  sur la tangente pour  $t - 1$  et  $t + 1$
3. On applique la formule :

$$v_x(t) = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$



**Exercice 1****Trajectoire d'un volant de badminton - Bac Métropole 2023 (★ ★)**

On s'intéresse au mouvement d'un volant de badminton lancé, à la date  $t = 0,0$  s d'un point noté  $G_0$  avec une vitesse initiale  $v_0$ , dont la norme  $v$  a pour valeur  $40 \text{ m.s}^{-1}$ , et faisant un angle  $\theta_0 = 60$  avec l'horizontale. La chronophotographie de ce mouvement est donnée ci-dessous. L'axe des  $x$  est suivant l'horizontale et l'axe des  $y$  suivant la verticale ascendante.



Chronophotographie du mouvement d'un volant de badminton

FIGURE 4 – Chronophotographie à compléter

**Q1** Estimer à l'aide d'une mesure graphique effectuée sur l'annexe à rendre avec la copie, la valeur de la vitesse du volant à la date  $t = 0,160$  s, c'est-à-dire la vitesse au point  $G_4$ .

**Q2** Représenter cette vitesse sur la chronophotographie donnée en utilisant une échelle de  $1,0 \text{ cm}$  pour  $5,0 \text{ m.s}^{-1}$

### B-3 Vecteur accélération $\vec{a}(t)$

#### 📖 Définition : Vecteur accélération

Le vecteur accélération instantanée  $\vec{a}(t)$  possède les caractéristiques suivantes :

- Il est la dérivée du vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$  par rapport au temps :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad \text{ou encore} \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

- Sa norme (en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) est donnée par :  $\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2}$



#### Exercice 2

#### Vol droit d'un parapentiste - *Bac Polynésie 2 2022* (★ ★)

On observe un parapente en vol droit équilibré (figure 1). On se demande s'il s'agit d'une voile d'école ou de compétition. Le mouvement du système est contenu dans un plan vertical muni du repère  $O, \vec{i}, \vec{j}$ .

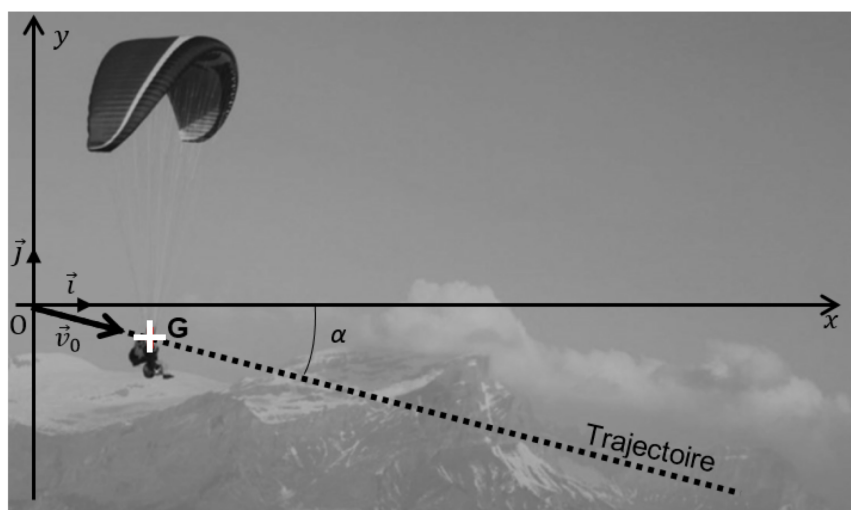


Figure 1. Pointage des positions du centre de masse G du système {pilote + parapente} au cours d'un vol droit équilibré.

Les coordonnées cartésiennes du point  $G(x, y)$ , représentant le parapentiste dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , sont données en fonction du temps  $t$  (en secondes) par les équations suivantes, issues d'une modélisation :

$$\begin{cases} x(t) = 11,0 \times t \\ y(t) = -1,1 \times t \end{cases} \quad \text{avec } x(t), y(t) \text{ en mètres}$$

**Q1** Déterminer les composantes du vecteur vitesse du système, puis la valeur de la vitesse du système :

- en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,
- en  $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ .



**Q2** Vérifier, à partir des résultats de la question précédente, la nature du mouvement (rectiligne uniforme). En déduire le vecteur accélération.

**Q3** Calculer l'angle de plané  $\alpha$  par rapport à l'horizontale (voir figure 1).

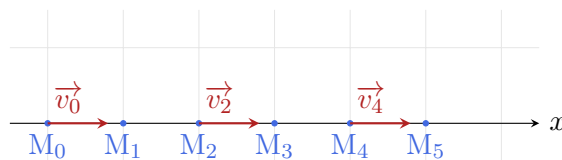
## II Le mouvement rectiligne

### A Mouvement rectiligne uniforme

#### ☰ Définition : Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Un mouvement rectiligne a :

- pour trajectoire une droite.
- Un vecteur vitesse de **direction** et de **norme** constante.

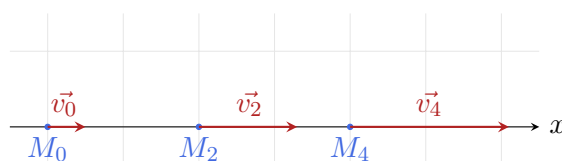


### B Mouvement rectiligne non uniforme

#### B-1 Mouvement rectiligne accéléré

##### ☰ Définition : Mouvement rectiligne accéléré

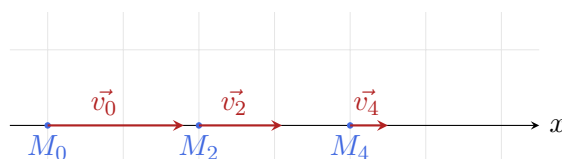
Si le mouvement est **accéléré**, alors les vecteurs vitesses ont des normes croissantes dans le sens du mouvement. **Le vecteur accélération est dans le sens du mouvement.**



#### B-2 Mouvement rectiligne ralenti

##### ☰ Définition : Mouvement rectiligne ralenti

Si le mouvement est **ralenti**, alors les vecteurs vitesses ont des normes décroissantes dans le sens du mouvement. **Le vecteur accélération est dans le sens opposé au mouvement.**



## C Quelques exercices pour s'entraîner



### Exercice 3

### Le freinage d'un TGV - *spcl.ac-montpellier* (★)

Lorsqu'il est lancé à pleine vitesse, le TGV roule à 320 km/h par rapport à son rail suivant les  $x$  croissants. On étudie le mouvement du point situé sur l'avant du TGV, dans un repère  $(O, x, y)$  :

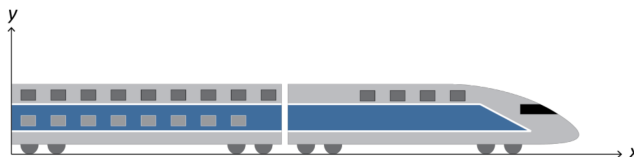


FIGURE 5 – Schéma de la situation

Lorsqu'il doit s'arrêter en urgence, le TGV actionne son système de freinage, ce qui provoque son arrêt complet au bout de 3 minutes et sur une distance de 3,3 km.

**Q1** Que vaut, en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , la vitesse du TGV lorsqu'il roule à « pleine vitesse » ?

**Q2** Que vaut son accélération moyenne  $a_{\text{moy}}$  pendant la durée du freinage ?

**Q3** Donner les coordonnées, dans le repère choisi, des vecteurs :  $\vec{v}_i$  (vitesse initiale),  $\vec{v}_f$  (vitesse finale) et  $\vec{a}_{\text{moy}}$  (accélération moyenne pendant le freinage).

**Q4** Que signifie, physiquement, le signe de la coordonnée  $a_{\text{moy},x}$  ?

**Q5** Si le système de freinage de ce TGV était capable d'assurer une accélération de valeur absolue plus élevée que celle calculée à la question précédente, quelle en serait la conséquence ?

**Exercice 4****Tracés qualitatifs de vecteurs - *spcl.ac-montpellier* (★)**

Ci-dessous sont représentés les enregistrements de quatre mouvements d'un point appartenant à un objet. La flèche en pointillés indique le sens du mouvement. Compléter chacune de ces trois figures avec, d'une couleur, le vecteur-vitesse et, d'une autre, le vecteur-accélération à la deuxième position repérée. On ne respectera pas d'échelle mais la direction et le sens de ces vecteurs doivent être cohérents.

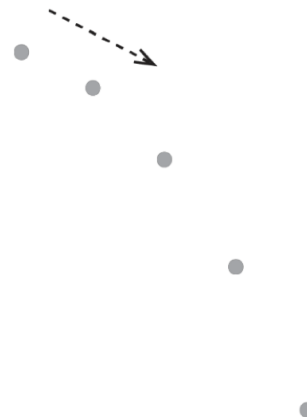
**Mouvement n°1****Mouvement n°2****Mouvement n°3****Mouvement n°4**

FIGURE 6 – A compléter

### III Le mouvement circulaire

La description d'un mouvement circulaire demande plus d'aisance mathématique et peut parfois paraître plus compliquée. Un bon moyen de simplifier les calculs sans s'éloigner d'un modèle cohérent consiste à procéder à un changement de repère, et se placer dans le **repère de Frenet**.

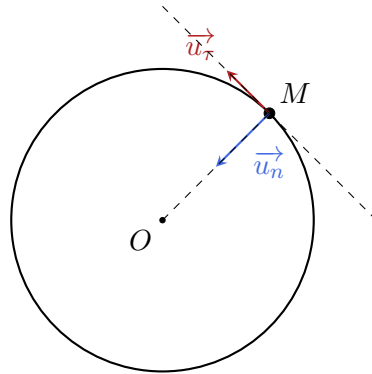
#### A Repère de Frenet

##### A-1 Description du repère - Vecteurs unitaires

### 📖 Définition : Le repère de Frenet

Le repère de Frenet correspond au repère  $(M, \vec{u}_\tau, \vec{u}_n)$  avec :

- Vecteur unitaire tangentiel  $\vec{u}_\tau$  tangent à la trajectoire orienté dans le sens du mouvement.
- Vecteur unitaire normal  $\vec{u}_n$  perpendiculaire à  $\vec{u}_\tau$ , orienté vers l'intérieur de la courbure.



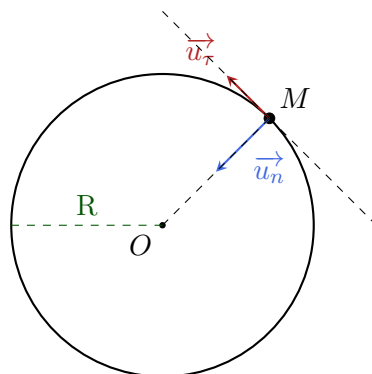
## A-2 Position, vitesse et accélération

### 🔗 Propriété : Le vecteur position

Le vecteur position est le vecteur  $\vec{OM}(t)$ . Il repère le point M de la trajectoire par rapport au centre du cercle.

Ici l'écriture du vecteur position est très simple :

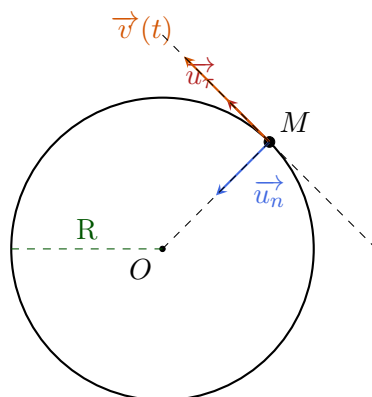
$$\vec{OM}(t) = 0 \vec{u}_\tau + R \vec{u}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$$



### 🔗 Propriété : Le vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est colinéaire à la trajectoire, il a pour départ le point M et pour norme :  $\|\vec{v}(t)\|$ .

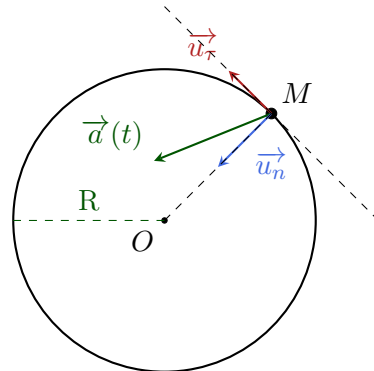
$$\vec{v}(t) = \|\vec{v}(t)\| \vec{u}_\tau + 0 \vec{u}_n = \begin{pmatrix} \|\vec{v}(t)\| \\ 0 \end{pmatrix}$$



### Propriété : Le vecteur accélération

Le vecteur accélération possède en revanche deux composantes.

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \vec{u}_\tau + \frac{v^2}{R} \vec{u}_n = \left( \frac{dv}{dt}, \frac{v^2}{R} \right)$$



## B Mouvement circulaire uniforme

### Définition : Mouvement circulaire uniforme

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme, le vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$  est constant. Dans ce cas, le vecteur accélération devient :

$$\vec{a}(t) = 0 \vec{u}_\tau + \frac{v^2}{R} \vec{u}_n = \left( 0, \frac{v^2}{R} \right)$$



#### Exercice 5

#### Satellites Starlink - Bac Métropole 2021 (★ ★)

Le projet Starlink vise à fournir un accès Internet à la totalité de la population mondiale grâce à une flotte de plusieurs milliers de satellites. Ces satellites sont plats et compacts, ils n'utilisent qu'un seul panneau voltaïque. Ils sont dotés de quatre antennes puissantes, assurant un fort débit. Les satellites Starlink sont transportés dans une fusée Falcon 9, puis déployés les uns derrière les autres à une altitude d'environ 400 km. Ils rejoignent ensuite leur orbite finale en utilisant leur propulseur ionique.

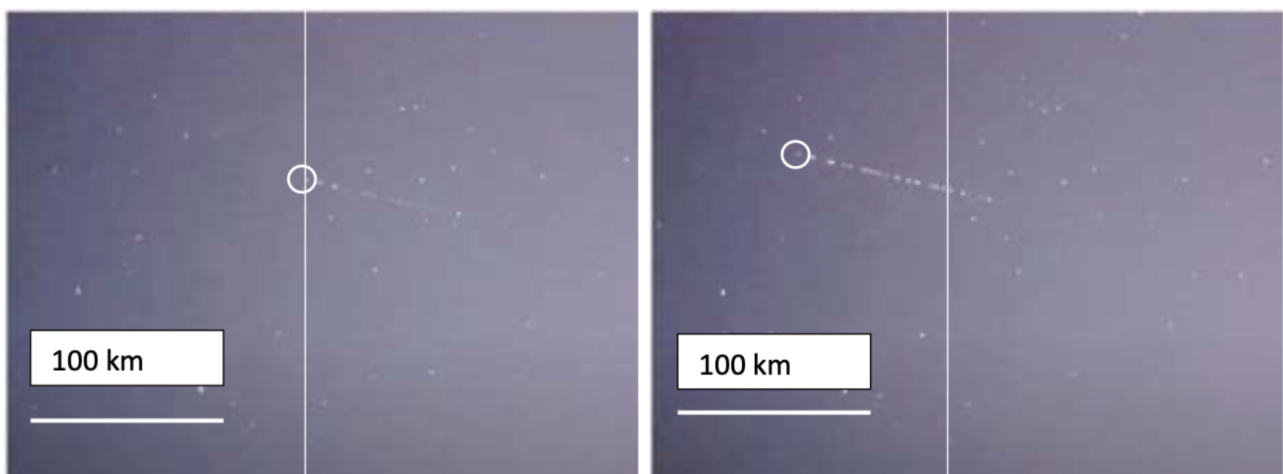


FIGURE 7 – Passage du «train Starlink3» au-dessus de la Nouvelle-Zélande le 31 Janvier 2020 à 22h04min11s et 22h04min21s

**Q1** Exploiter les clichés datés du ciel (figure 7) pour estimer la valeur de la vitesse de la tête du train de satellites.

Dans le référentiel géocentrique, le mouvement d'un satellite Starlink peut être modélisé par un mouvement circulaire, de rayon  $R$ , à la vitesse  $v$ .

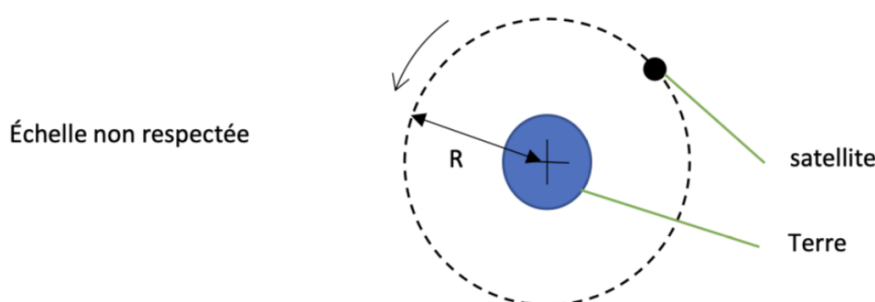


FIGURE 8 – Schéma à reproduire

**Q2** Reproduire sur le schéma la base de Frenet et donner l'expression du vecteur accélération  $\vec{a}(t)$  d'un satellite dans le repère de Frenet.

On donne l'expression de la vitesse du satellite en orbite circulaire autour de la Terre comme :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}$$

avec  $R$  la distance entre le satellite et le centre de la Terre.

**Q3** Calculer la vitesse des satellites et comparer avec le résultat de la question 1.

### Données

- Constante de gravitation universelle :  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse de la Terre :  $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
- Rayon moyen de la Terre :  $R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$