Module d'Young par régime impulsionnel

Préparation à l'Agrégation de Physique

Introduction et objectifs

Un barreau métallique frappé à une extrémité se met à vibrer sur ses **modes propres longitudinaux**. Les fréquences de ces modes sont fixées par la longueur du barreau et par la vitesse c des ondes de compression, qui dépend elle-même du module d'Young E et de la masse volumique ρ du matériau. Mesurer le spectre de la réponse impulsionnelle permet donc de remonter à c puis à E : c'est un exemple de mesure d'une grandeur mécanique statique par une méthode dynamique.

Objectifs expérimentaux :

- mesurer la masse volumique ρ du barreau par pesée et mesures géométriques ;
- exciter le barreau par une impulsion et relever le spectre de sa réponse ;
- extraire les fréquences f_n des sept premiers modes et en déduire la vitesse du son c ;
- calculer le module d'Young $E = \rho c^2$ et discuter la validité du modèle d'onde unidimensionnelle.

I. Rappels théoriques

Ondes longitudinales dans un barreau mince

Dans un barreau dont le diamètre est petit devant la longueur d'onde, le déplacement longitudinal $u(x,t)$ des sections droites vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}.$$

Pour un barreau de longueur L aux extrémités **libres**, la contrainte $E\,\partial u/\partial x$ s'annule en $x = 0$ et en $x = L$. Les modes propres sont alors

$$u_n(x,t) = U_n \cos\!\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(2\pi f_n t + \varphi_n), \qquad \boxed{f_n = n\,\frac{c}{2L}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Les extrémités sont des *ventres* de déplacement. Le mode fondamental vérifie $L = \lambda/2$ avec $\lambda = c/f_1$, et le mode n contient n demi-longueurs d'onde. Les fréquences propres sont donc alignées sur une droite passant par l'origine, de pente $a = c/(2L)$.

Correction de dispersion (Rayleigh–Love)

Un barreau de rayon r n'est pas strictement unidimensionnel : le gonflement latéral dû à la contraction de Poisson ajoute de l'inertie transverse, et la vitesse de phase diminue légèrement quand la longueur d'onde devient comparable au rayon. Au premier ordre, la correction de Rayleigh–Love donne, avec ν le coefficient de Poisson et $c_0 = \sqrt{E/\rho}$,

$$f_n \simeq n\,\frac{c_0}{2L}\Big(1 - \beta\, n^2\Big), \qquad \beta = \frac{\nu^2 \pi^2 r^2}{4L^2}.$$

Pour $L = 0{,}81\,\mathrm{m}$, $r = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ et $\nu \simeq 0{,}33$, on trouve $\beta \simeq 2{,}6 \times 10^{-4}$: les fréquences ne sont pas exactement des multiples de f_1, l'écart atteignant $1\,\%$ vers $n = 7$. Cet effet est petit mais, avec un spectre résolu à quelques hertz, mesurable.

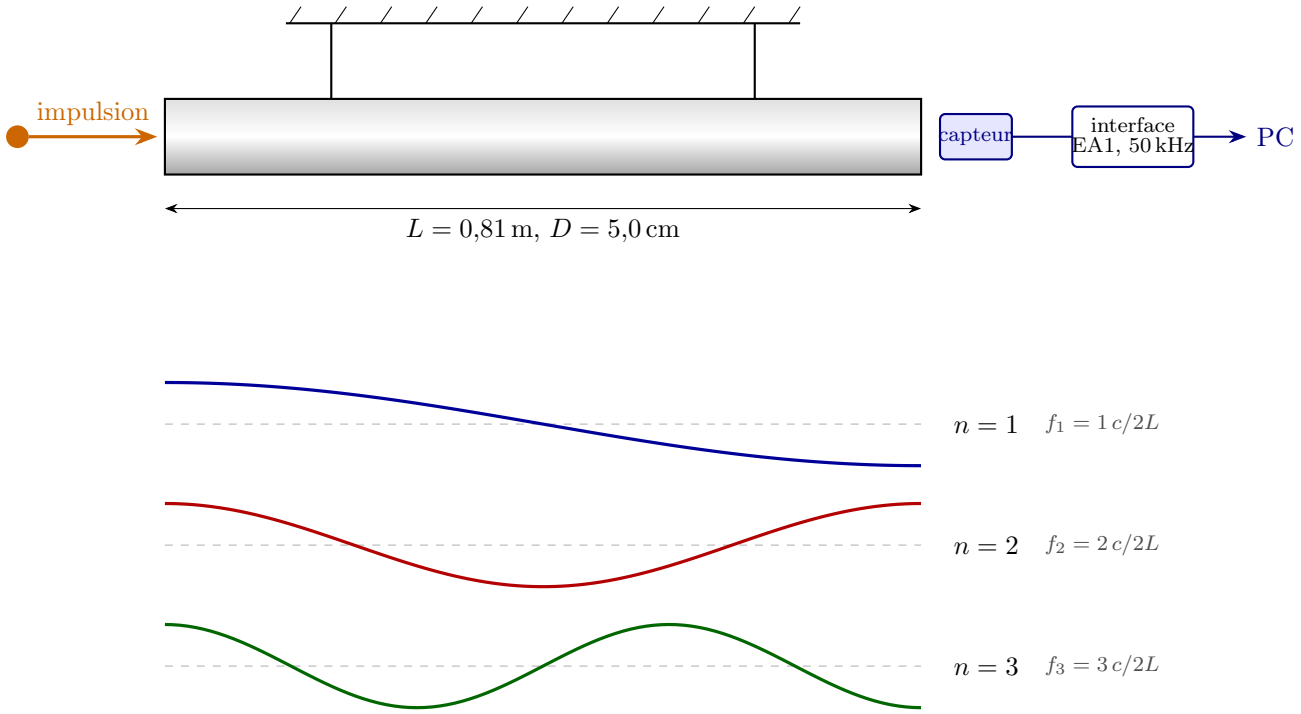

FIGURE 1 – Principe du montage (en haut) et profils de déplacement $u_n(x) \propto \cos(n\pi x/L)$ des trois premiers modes d'un barreau libre aux deux extrémités (en bas) : les extrémités sont des ventres de déplacement.

II. Dispositif expérimental et protocole

Matériel et grandeurs du montage

- barreau métallique cylindrique, de longueur $L = 0{,}81\,\mathrm{m}$ et de diamètre $D = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ (mesures géométriques) ;
- balance : masse $m = 4{,}461\,\mathrm{kg}$;
- dispositif de suspension laissant le barreau libre à ses extrémités (fils fins) ;
- capteur relié à l'entrée analogique `EA1` d'une interface d'acquisition, échantillonnant à $f_e = 50\,\mathrm{kHz}$;
- logiciel d'acquisition avec calcul de la transformée de Fourier ; traitement en Python.

Protocole

1. Peser le barreau et mesurer sa longueur et son diamètre : on en déduit ρ.
2. Suspendre le barreau pour le laisser libre à ses extrémités.
3. Déclencher l'acquisition ($N = 10\,000$ points, durée $T = 0{,}2\,\mathrm{s}$) puis frapper le barreau dans l'axe sur une extrémité.
4. Enregistrer la réponse temporelle et son spectre de Fourier (fichier `gros_barreau_jordan.csv`).

III. Masse volumique

Le barreau est supposé plein. Son volume vaut $V = \pi(D/2)^2 L = 1{,}590 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$, d'où

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4{,}461}{1{,}590 \times 10^{-3}} \simeq 2{,}80 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}.$$

Cette valeur est caractéristique d'un alliage d'aluminium.

IV. Acquisition et spectre

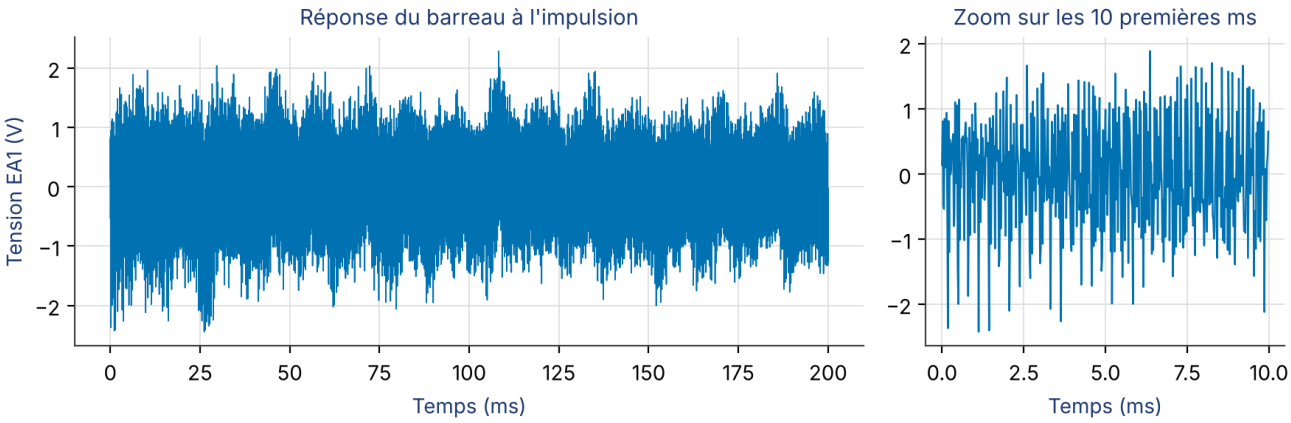

FIGURE 2 – Signal temporel enregistré après l'impulsion. Le signal ne décroît pas de façon visible sur les 0,2 s de la fenêtre : les modes sont très peu amortis.

Les oscillations persistent pendant toute la fenêtre d'acquisition : on ne peut donc pas mesurer ici le temps d'amortissement des modes (il dépasse largement 0,2 s). La durée $T = 0{,}2\,\text{s}$ fixe en revanche la **résolution spectrale** $\Delta f = 1/T = 5\,\text{Hz}$, qui limite la précision sur les fréquences propres.

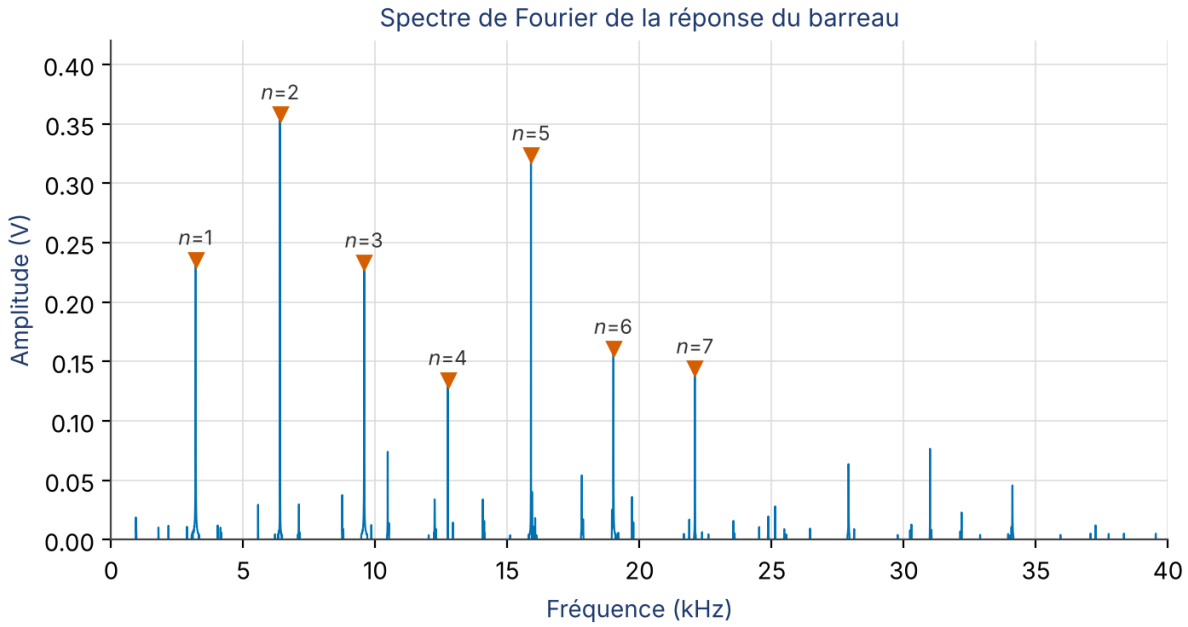

FIGURE 3 – Spectre de Fourier du signal. Les sept pics marqués d'un triangle sont les modes longitudinaux $n = 1$ à 7.

Le spectre présente sept raies dominantes, régulièrement espacées d'environ 3,2 kHz : ce sont les modes longitudinaux. Leurs amplitudes diffèrent d'un mode à l'autre (les modes 2 et 5 sont les plus intenses, le 4 et le 7 les plus faibles) : cette répartition dépend du point d'impact et de la position du capteur. On observe aussi des raies secondaires plus faibles et non harmoniques (par exemple vers 10,5, 17,8 et 31,0 kHz) ; elles correspondent vraisemblablement à d'autres types de modes (flexion, torsion) ou à un couplage avec le support, et ne sont pas exploitées.

Extraction des fréquences propres

Pour chaque pic, la fréquence est affinée par une **interpolation parabolique** sur le maximum et ses deux voisins, puisque la case du spectre est large de 5 Hz.

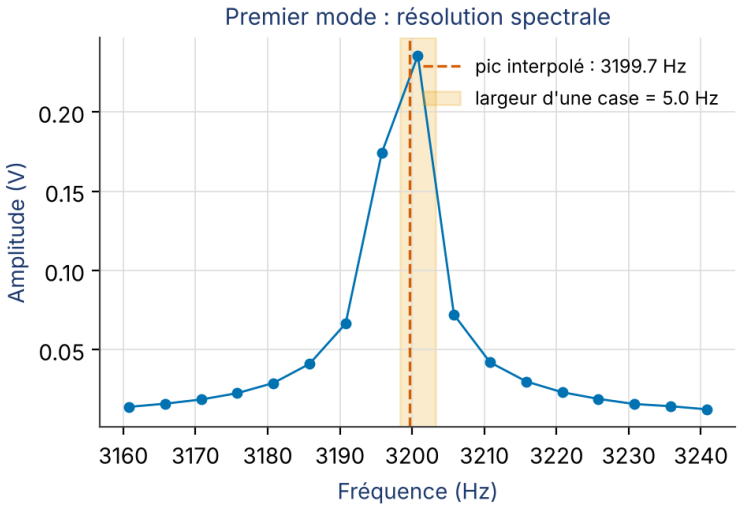

FIGURE 4 – Premier mode : points du spectre autour du pic, position interpolée et largeur d'une case spectrale.

L'incertitude retenue sur chaque fréquence est celle d'une lecture à une case près en loi uniforme, $u(f) = \Delta f/\sqrt{12} \simeq 1{,}4\,\text{Hz}$.

V. Vitesse de propagation

Fréquences mesurées

n	f_n brut (Hz)	f_n interpolé (Hz)	f_n/n (Hz)	résidu affine (Hz)	résidu dispersion (Hz)
1	3200,8	3199,7	3199,7	-48	$+0,1$
2	6391,6	6391,6	3195,8	-7	$-2,0$
3	9577,4	9577,0	3192,3	$+28$	$+0,2$
4	12743,2	12743,3	3185,8	$+43$	$-0,4$
5	15889,0	15889,0	3177,8	$+38$	$+0,2$
6	19009,7	19009,1	3168,2	$+8$	$+2,3$
7	22090,5	22090,7	3155,8	-62	$-1,4$

Si les modes étaient de simples multiples de f_1, la colonne f_n/n serait constante. Elle **décroît** de 3 199,7 à 3 155,8 Hz (soit $-1{,}4\,\%$) quand n passe de 1 à 7 : c'est la signature de la dispersion.

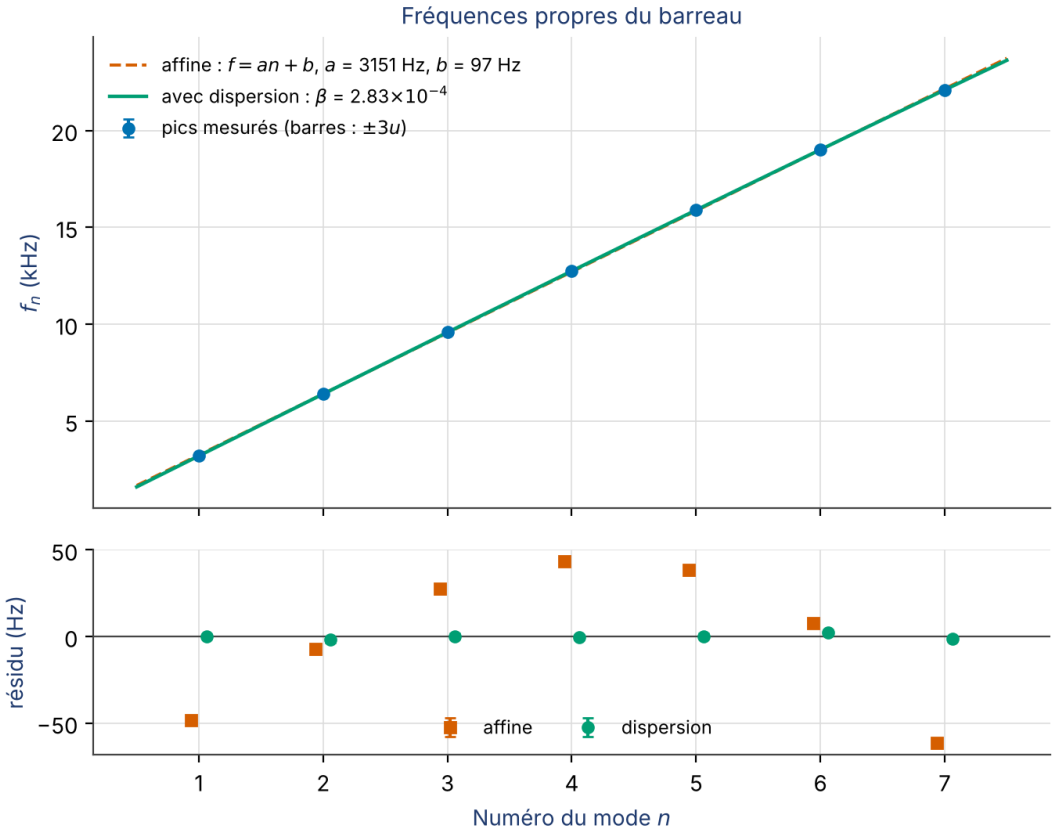

FIGURE 5 – Fréquences propres en fonction de n avec les deux ajustements, et résidus. Les résidus de l'ajustement affine (carrés) ont une structure en arche de -62 à $+43$ Hz, très supérieure à l'incertitude ; ceux du modèle avec dispersion (ronds) sont de l'ordre de 2 Hz.

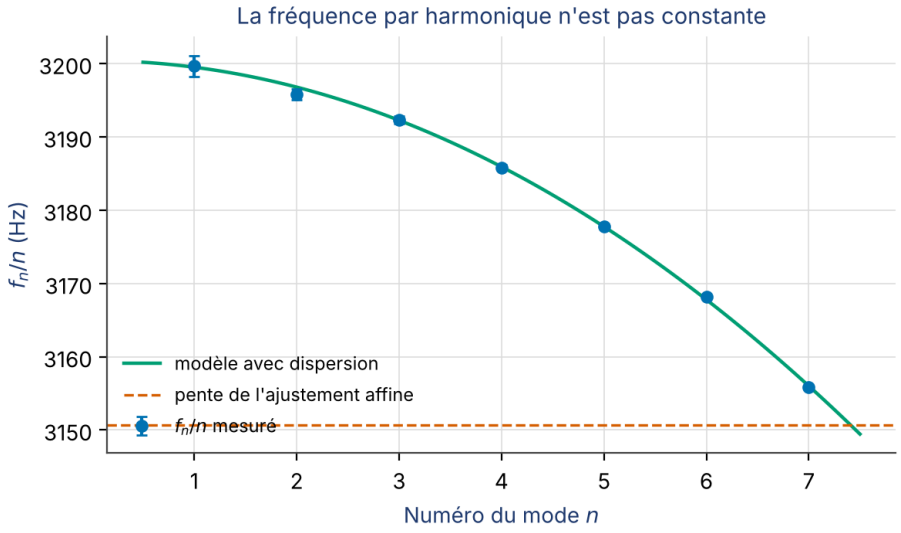

FIGURE 6 – Fréquence rapportée au numéro du mode : la décroissance monotone est bien décrite par le modèle de Rayleigh–Love.

Trois ajustements

On ajuste les sept fréquences, avec $u(f) = 1{,}4$ Hz :

Modèle	paramètres	χ^2_{red}	c (m/s)	E (GPa)
affine $f = an + b$ (méthode du carnet)	$a = 3\,150{,}7$ Hz, $b = 97{,}2$ Hz	≈ 990	5 104	73,1
droite par l'origine $f = an$	$a = 3\,170{,}2$ Hz	$\approx 1\,880$	5 136	74,0
avec dispersion $f = an(1 - \beta n^2)$	$a = 3\,200{,}4$ Hz, $\beta = 2{,}83 \times 10^{-4}$	1,1	5 185	75,4

La vitesse se déduit de la pente : $c = 2La$. Seul le modèle de dispersion est compatible avec les données ($\chi^2_{\text{red}} \simeq 1$) ; les deux modèles sans dispersion sont rejetés. L'ordonnée à l'origine $b \simeq 97$ Hz de l'ajustement affine n'a pas de sens physique : elle absorbe la courbure due à la dispersion, alors qu'un modèle de barreau idéal impose $b = 0$.

Le coefficient de Poisson implicite, $\nu = \sqrt{4\beta L^2/(\pi^2 r^2)} \simeq 0{,}35$, est une valeur plausible pour un alliage d'aluminium (de l'ordre de 0,33 dans la littérature, à confirmer dans une table) : la correction n'est donc pas un simple paramètre d'ajustement, elle a le bon ordre de grandeur.

VI. Module d'Young

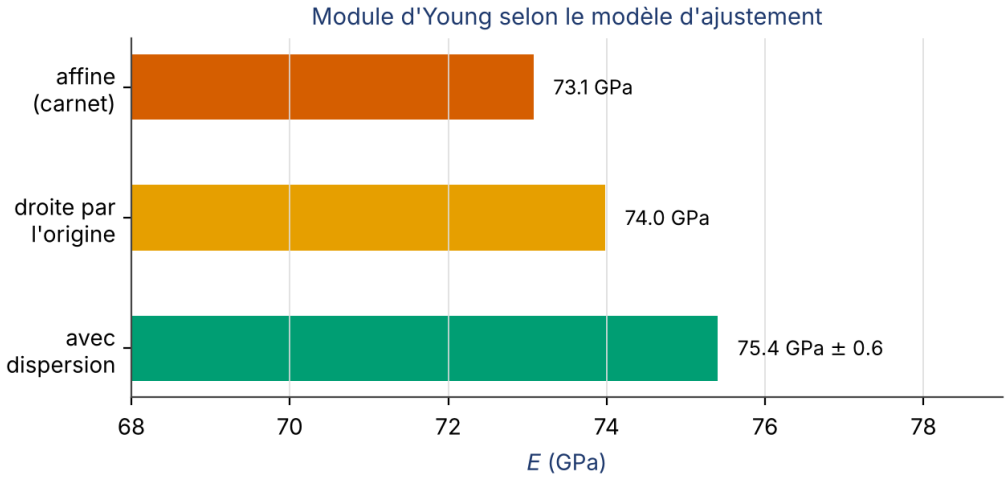

FIGURE 7 – Module d'Young obtenu selon le modèle d'ajustement : le choix du modèle déplace le résultat de 2 à 3 %.

Avec la vitesse corrigée $c_0 = 5\,185\,\text{m s}^{-1}$:

$$E = \rho\, c_0^2 = 2\,805 \times 5\,185^2 \simeq 7{,}5 \times 10^{10}\,\text{Pa}.$$

Résultat :

$$\boxed{c_0 = 5\,185 \pm 6\ \text{m s}^{-1}, \qquad E = 75{,}4 \pm 0{,}6\ \text{GPa}}$$

(modèle avec dispersion ; le modèle affine du carnet donnerait $c = 5\,104\,\text{m s}^{-1}$ et $E = 73{,}1$ GPa).

VII. Analyse des incertitudes et discussion

Bilan des incertitudes

Les incertitudes sont propagées par Monte-Carlo (10^4 tirages, graine fixée), en retirant à chaque tirage les fréquences, la longueur, le diamètre et la masse selon des lois normales. Les valeurs suivantes sont des **estimations raisonnables** de l'expérimentateur, non des valeurs certifiées :

- fréquences : $u(f) = 1{,}4$ Hz ;
- longueur : $u(L) = 1$ mm ; diamètre : $u(D) = 0{,}2$ mm ; masse : $u(m) = 1$ g.

On obtient $u(c_0) = 6\,\text{m s}^{-1}$ (0,1 %) et $u(E) = 0{,}6$ GPa (0,8 %). Cette incertitude est **purement statistique**. Elle est très inférieure à l'écart entre les trois modèles (2,3 GPa) : l'incertitude systématique due au choix du modèle domine.

Comparaison à la littérature

Les modules d'Young usuels des alliages d'aluminium sont de l'ordre de 70 GPa (valeurs de 69 à 72 GPa selon l'alliage ; ordre de grandeur de la littérature, à confirmer dans une table de référence). Notre résultat, $75{,}4 \pm 0{,}6$ GPa, est **supérieur** de 5 à 9 % à ces valeurs et n'est pas compatible avec elles au sens des incertitudes statistiques. Le résultat du modèle affine (73,1 GPa) paraît plus proche de la valeur attendue, mais cet accord est fortuit : le modèle est rejeté par les données.

Pistes pour expliquer l'écart, à explorer avant de conclure :

- **masse volumique** : le barreau est supposé plein et parfaitement cylindrique ; une cavité, un chanfrein ou un diamètre mal mesuré modifient ρ (et $E \propto \rho$) ;
- **géométrie** : $c = 2Lf_1$ et $\rho = m/(\pi r^2 L)$ donnent $E = \rho c^2 \propto L/D^2$; une erreur de 1 % sur D produit 2 % sur E, et une erreur de 1 % sur L produit 1 % ;
- **ordre de la correction** : la correction de Rayleigh–Love est du premier ordre en $(r/\lambda)^2$; pour $n = 7$ et $r/L \simeq 0{,}03$, des termes d'ordre supérieur (théorie de Pochhammer–Chree) peuvent ne pas être négligeables ;
- **conditions aux limites** : la suspension et le capteur perturbent légèrement les modes.

Conclusion

L'analyse du spectre du barreau met en évidence sept modes longitudinaux de fréquences voisines de $n \times 3{,}2$ kHz. Le modèle d'onde unidimensionnelle donne un premier résultat ($c = 5\,104\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $E = 73{,}1$ GPa), mais il est rejeté par les données, car f_n/n décroît de 1,4 % entre $n = 1$ et $n = 7$. La correction de dispersion de Rayleigh–Love décrit les mesures ($\chi^2_{\mathrm{red}} \simeq 1$) et conduit à

$$c_0 = 5\,185 \pm 6\ \mathrm{m\,s^{-1}}, \qquad E = 75{,}4 \pm 0{,}6\ \mathrm{GPa},$$

un coefficient de Poisson implicite $\nu \simeq 0{,}35$ plausible, mais un module légèrement supérieur aux valeurs usuelles des alliages d'aluminium : un biais systématique sur ρ ou sur L reste à rechercher.

Je n'espère pas, mais des coquilles peuvent se glisser dans ce document…
