Barreau chauffant

Préparation à l'Agrégation de Physique

Introduction et objectifs

Le **barreau chauffant** est un montage classique de la leçon sur les phénomènes de transport : un barreau métallique, chauffé à une extrémité et maintenu à 0 °C à l'autre, développe un gradient de température dont la mesure permet d'accéder à la **conductivité thermique** λ du métal. Ici, le barreau est en aluminium.

La difficulté du montage tient aux **pertes latérales** : une partie de la puissance injectée s'échappe par la surface du barreau et n'atteint jamais la glace. On ne peut donc pas écrire directement « flux = puissance électrique ». On résout le problème en *encadrant* le flux dans le barreau entre la puissance électrique (borne haute) et la puissance effectivement reçue par la glace (borne basse), mesurée en pesant la glace fondue.

Objectifs expérimentaux :

- établir un gradient de température dans un barreau d'aluminium et le mesurer en régime quasi stationnaire ;
- vérifier la linéarité du profil $T(x)$ prévue par la loi de Fourier ;
- déterminer un encadrement de λ à partir des deux estimations du flux thermique ;
- discuter l'effet des pertes latérales et comparer à la valeur tabulée.

I. Rappels théoriques

Loi de Fourier et équation de diffusion

Le transfert thermique par conduction est décrit par la loi de Fourier, qui relie la densité de flux thermique $\vec{\jmath}_{\text{th}}$ au gradient de température :

$$\vec{\jmath}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T,$$

où λ est la conductivité thermique (en $\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$). Pour un barreau mince, la température ne dépend que de l'abscisse x le long de l'axe, et le bilan d'énergie sur une tranche conduit à l'équation de diffusion

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

où μ est la masse volumique et c la capacité thermique massique du métal. Le rapport $D_{\text{th}} = \lambda/(\mu c)$ est la diffusivité thermique.

Régime stationnaire

En régime stationnaire, $\partial T/\partial t = 0$, donc $\partial^2 T/\partial x^2 = 0$ et le profil est **affine**. En prenant l'origine $x = 0$ à l'extrémité plongée dans la glace (température T_f) et T_c la température à l'autre extrémité du barreau de longueur utile L :

$$T(x) = T_f + \frac{T_c - T_f}{L}\,x.$$

Le flux est alors uniforme et dirigé vers la glace ($\vec{j}_{\text{th}} = -j_{\text{th}}\,\vec{u}_x$) ; en notant $a = \mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ la pente du profil, la loi de Fourier donne, en module,

$$\boxed{\lambda = \frac{j_{\text{th}}}{a}} \qquad \text{avec } j_{\text{th}} = \frac{\Phi}{S},$$

où Φ est la puissance thermique traversant la section S du barreau.

Encadrement du flux en présence de pertes

Le flux d'énergie diminue le long du barreau à cause des pertes latérales (convection et rayonnement). Entre l'extrémité chaude et l'extrémité froide :

- à l'extrémité chaude, le flux injecté est au plus la puissance électrique dissipée $P_{\text{el}} = UI$;
- à l'extrémité froide, le flux est celui reçu par la glace, déduit de la masse m fondue pendant Δt : $P_{\text{glace}} = L_f\, m/\Delta t$.

Le flux Φ dans la zone de mesure vérifie donc $P_{\text{glace}} \leq \Phi \leq P_{\text{el}}$, d'où

$$\boxed{\frac{1}{S\,a}\,\frac{L_f\, m}{\Delta t} \;\leq\; \lambda \;\leq\; \frac{1}{S\,a}\,UI}$$

Le premier terme est la borne basse $\lambda_{\min}$, qui tient compte des pertes. Le second est la borne haute $\lambda_{\max}$ (« sans pertes »).

II. Dispositif expérimental et protocole

Principe du montage

Une extrémité du barreau d'aluminium est chauffée par effet Joule, la puissance électrique étant fournie par un générateur de courant réglé à $I \simeq 4\,\text{A}$. L'autre extrémité plonge dans un calorimètre rempli de glaçons, qui thermostate cette extrémité à 0 °C. Il s'établit alors un gradient de température le long du barreau. Cinq capteurs de température, repérés par leurs abscisses $x_1 \ldots x_5$ repérées depuis la glace, permettent de relever le profil.

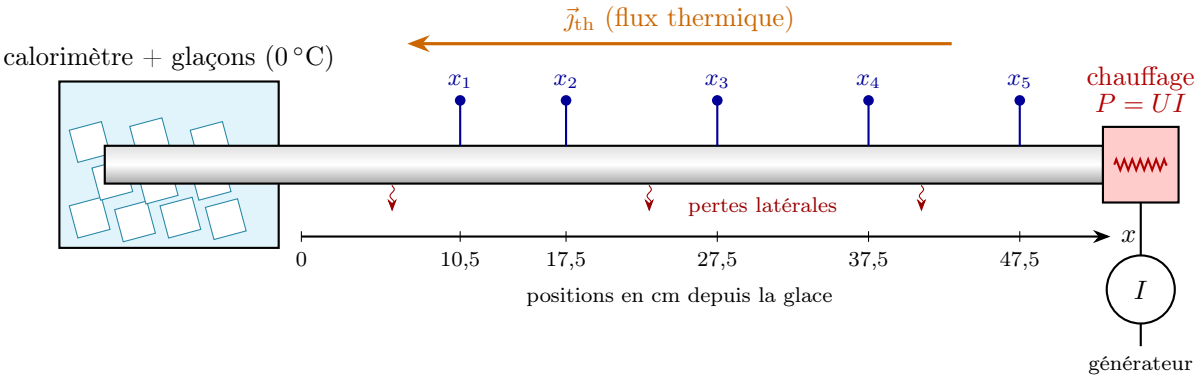

FIGURE 1 – Schéma du montage : le barreau est chauffé à droite, thermostaté à 0 °C par la glace à gauche. Les cinq capteurs relèvent le profil de température.

Matériel et grandeurs du montage

- barreau d'aluminium, de diamètre $d = 2{,}54\,\text{cm}$ et de section $S = \pi d^2/4 = 5{,}07 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$;
- élément chauffant alimenté par un générateur de courant : $U = 4{,}41\,\text{V}$, $I = 4{,}01\,\text{A}$, soit $P_{\text{el}} = 17{,}7\,\text{W}$;
- calorimètre contenant des glaçons ;
- cinq capteurs de température aux abscisses $x_1 = 10{,}5$, $x_2 = 17{,}5$, $x_3 = 27{,}5$, $x_4 = 37{,}5$ et $x_5 = 47{,}5\,\text{cm}$;
- balance (pesée de la glace fondue), chronomètre.

Protocole

1. Plonger l'extrémité du barreau dans le calorimètre rempli de et d'eau, vérifié que le mélange est à 0° C puis enclencher le chauffage.
2. Relever les cinq températures $T_1 \dots T_5$ à intervalles réguliers (toutes les 5 minutes).
3. Attendre que les températures cessent d'évoluer notablement : le régime est alors quasi stationnaire.
4. Peser la glace fondue pendant la durée Δt du régime stationnaire : on trouve $m = 89{,}3\,\text{g}$ en $\Delta t = 48\,\text{min}$.

III. Acquisition et traitement

Relevés expérimentaux

t (min)	5	10	15	20	25	30	35	40	50	55	59
T_1 (°C)	5	9	11	12	16	18	17	16	17	15	14
T_2 (°C)	6	12	16	18	22	24	22	23	22	23	22
T_3 (°C)	7	15	20	23	26	29	28	29	29	29	29
T_4 (°C)	18	26	31	35	38	41	41	41	43	43	42
T_5 (°C)	26	34	40	44	47	50	51	51	53	53	52

La résolution de lecture est de 1 °C.

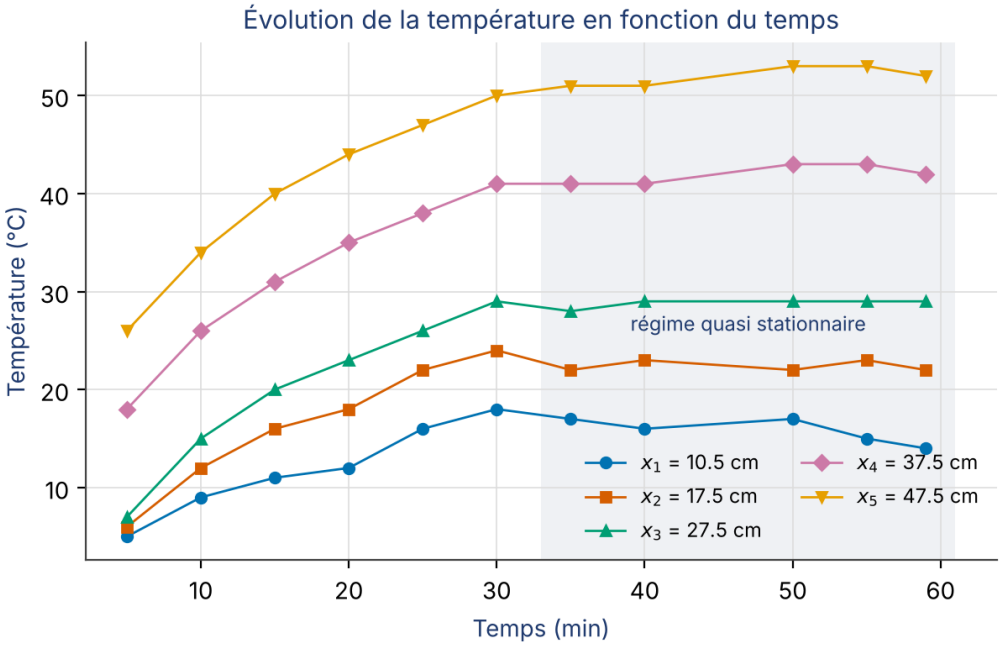

FIGURE 2 – Température des cinq capteurs en fonction du temps. Après environ 30 minutes, toutes les températures se stabilisent : la zone grisée correspond au régime quasi stationnaire exploité.

Attention à veiller que les thermomètres ne se mettent pas en veille durant l'expérience (c'est pour cela qu'il me manque un point à 45min).

Les températures croissent d'abord rapidement puis se stabilisent à partir de $t \simeq 30$ à 35 min, avec des fluctuations de l'ordre de 1 à 2 °C. On retient pour l'exploitation les **cinq derniers relevés** ($t = 35$, 40, 50, 55 et 59 min).

Code Python

Le traitement se résume à trois étapes :

- lecture des relevés et sélection du régime quasi stationnaire,
- régression affine de $T(x)$ à chaque date.
- calcul des deux bornes de λ

Listing 1 – Traitement des données du barreau chauffant (script `analyse_barreau.py`).

```python
import numpy as np
import pandas as pd
from scipy.optimize import curve_fit

# --- Constantes et grandeurs du montage ------------------------------
Lf_glace = 333.55                # chaleur latente de fusion de la glace (J/g)
D        = 0.0254                # diametre du barreau (m)
S        = np.pi * (D / 2)**2    # section (m^2)
U, I     = 4.41, 4.01            # tension (V) et courant (A) de chauffe
m_glace  = 89.3                  # masse de glace fondue (g)
dt_glace = 48 * 60               # duree de la fusion (s)

# --- Lecture des releves (temperatures en degres C, dates en min) ----
data = pd.read_csv("Valeurs.csv", delimiter=";", decimal=".")
data.columns = [c.strip() for c in data.columns]
t = data["t"].values * 60.0                                  # s
T = np.array([data[f"T{i}"].values for i in range(1, 6)], float)
x = np.array([10.5, 17.5, 27.5, 37.5, 47.5]) * 1e-2          # m, depuis la glace

# --- Regime quasi stationnaire : t >= 35 min (indices 6 a 10) --------
def affine(x, a, b):
    return a * x + b

pentes = []
for k in range(6, 11):
    (a, b), _ = curve_fit(affine, x, T[:, k])
    pentes.append(a)
grad = np.mean(pentes)                                       # K/m

# --- Encadrement de lambda -------------------------------------------
j_max = U * I / S                          # toute la puissance electrique
j_min = Lf_glace * m_glace / (dt_glace * S)  # flux mesure par la glace fondue
print(f"gradient moyen : {grad:.1f} K/m")
print(f"lambda_max = {j_max / grad:.0f} W/m/K")
print(f"lambda_min = {j_min / grad:.0f} W/m/K")
```

Profil de température et gradient

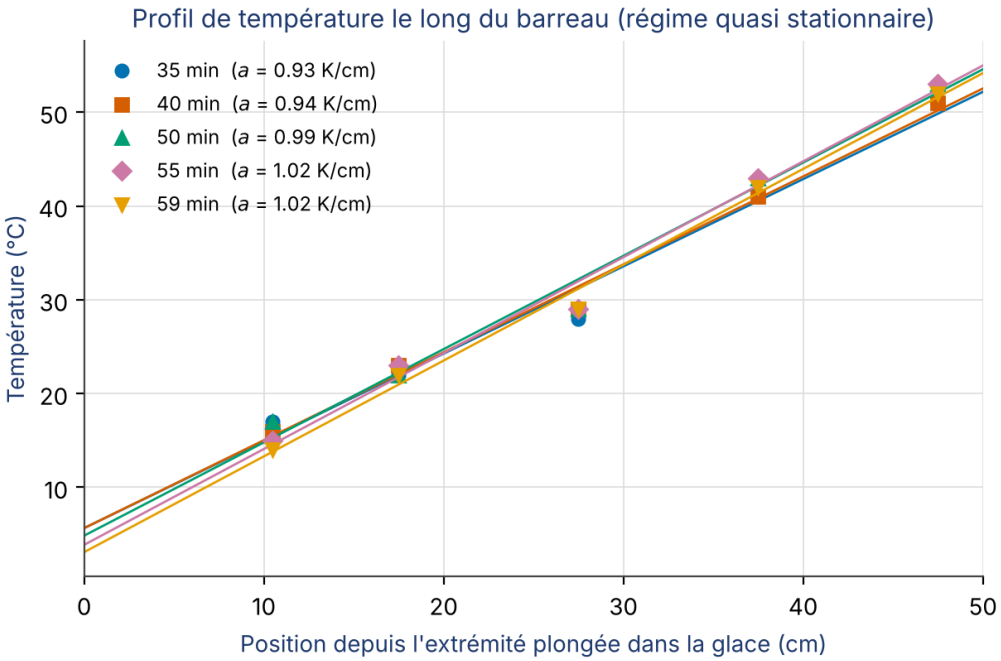

FIGURE 3 – Profil de température le long du barreau aux cinq dates retenues, et ajustements affines $T = ax + b$. Les profils sont quasi superposés.

Le profil est bien décrit par une droite : le coefficient de détermination R^2 des ajustements est compris entre 0,981 et 0,993. Les pentes obtenues à chaque date (régression sur les cinq points) sont rassemblées ci-dessous.

t (min)	35	40	50	55	59
a ($\mathrm{K\,m^{-1}}$)	93,1	93,8	99,5	102,3	102,2
$u(a)$ ajustement ($\mathrm{K\,m^{-1}}$)	7,4	5,4	7,5	6,6	4,9
R^2	0,981	0,990	0,983	0,988	0,993

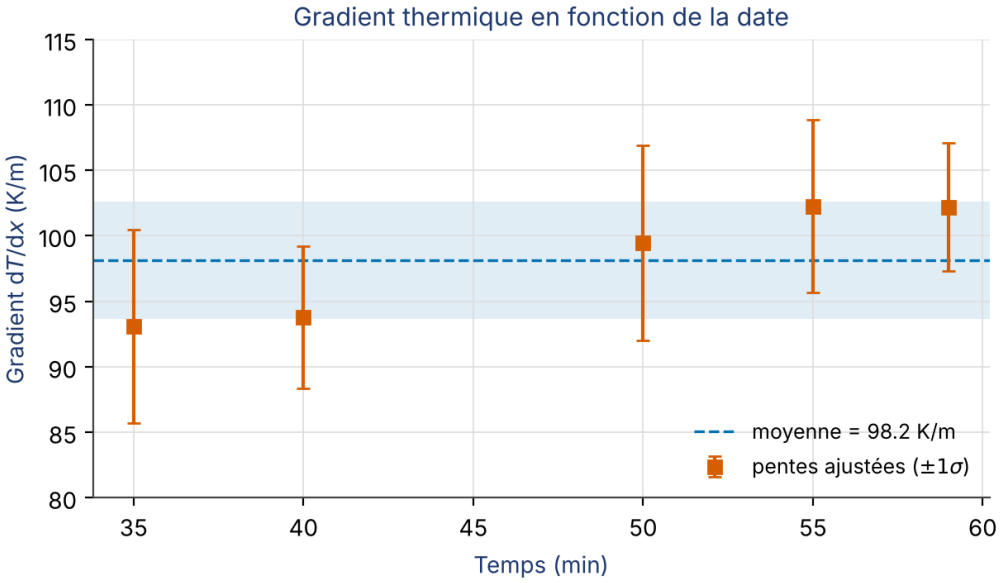

FIGURE 4 – Gradient thermique aux cinq dates : la moyenne vaut $98{,}2\,\mathrm{K\,m^{-1}}$.

La moyenne des cinq pentes est

$$\bar{a} = 98{,}2\,\mathrm{K\,m^{-1}}, \qquad \sigma_a = 4{,}5\,\mathrm{K\,m^{-1}}, \qquad u(\bar{a}) = \frac{\sigma_a}{\sqrt{5}} \simeq 2{,}0\,\mathrm{K\,m^{-1}}.$$

On observe une légère croissance de la pente entre 35 et 59 minutes (de 93 à $102\,\mathrm{K\,m^{-1}}$) : le régime n'est pas rigoureusement stationnaire. Cette dérive est la source d'incertitude dominante sur le gradient, et c'est elle que l'on retient dans $u(\bar{a})$.

IV. Estimation de λ sans pertes (borne haute)

Si toute la puissance électrique traversait le barreau, on aurait

$$j_{\mathrm{th,max}} = \frac{UI}{S} = \frac{4{,}41 \times 4{,}01}{5{,}07 \times 10^{-4}} = 3{,}49 \times 10^{4}\,\mathrm{W\,m^{-2}},$$

d'où

$$\lambda_{\max} = \frac{j_{\mathrm{th,max}}}{\bar{a}} = \frac{3{,}49 \times 10^{4}}{98{,}2} \simeq 356\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}.$$

Cette valeur est une **surestimation** : elle ignore les pertes latérales, qui retirent de la puissance avant la zone de mesure.

V. Estimation de λ avec correction des pertes (borne basse)

La glace reçoit la puissance

$$P_{\mathrm{glace}} = \frac{L_f\, m}{\Delta t} = \frac{333{,}55 \times 89{,}3}{48 \times 60} \simeq 10{,}3\,\mathrm{W},$$

avec $L_f = 333{,}55\,\mathrm{J\,g^{-1}}$, $m = 89{,}3\,\mathrm{g}$ et $\Delta t = 2880\,\mathrm{s}$. Le flux surfacique correspondant est

$$j_{\mathrm{th,min}} = \frac{P_{\mathrm{glace}}}{S} = 2{,}04 \times 10^{4}\,\mathrm{W\,m^{-2}} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{\min} = \frac{j_{\mathrm{th,min}}}{\bar{a}} \simeq 208\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}.$$

La différence $P_{\mathrm{el}} - P_{\mathrm{glace}} \simeq 7{,}3\,\mathrm{W}$, soit environ 42 % de la puissance électrique, représente la puissance perdue sur les côtés du barreau et à ses extrémités.

Encadrement final

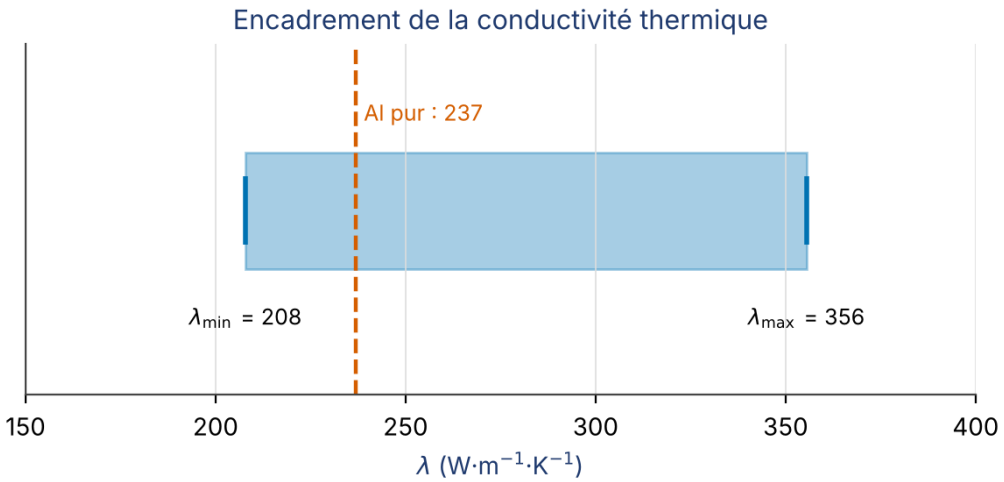

FIGURE 5 – Encadrement de λ par les deux estimations du flux, comparé à la valeur tabulée de l'aluminium pur.

Résultat :

$$\boxed{208 \pm 5 \;\leq\; \lambda_{\mathrm{Al}} \;\leq\; 356 \pm 8 \;\; \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}}$$

La valeur tabulée de l'aluminium pur à température ambiante, $\lambda \simeq 237\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ est **à l'intérieur de l'intervalle**.

VI. Analyse des incertitudes et discussion

Bilan des incertitudes

Les incertitudes sur les régressions sont propagées par Monte-Carlo ($N = 10^4$ tirages) à partir des hypothèses suivantes, qui sont des **estimations raisonnables** de l'expérimentateur et non des valeurs certifiées :

- température : lecture à 1 °C près, soit une loi uniforme d'écart-type $0{,}5/\sqrt{3} \simeq 0{,}29\,°\mathrm{C}$;
- positions : $\pm 0{,}5\,\mathrm{cm}$; diamètre $\pm 0{,}1\,\mathrm{mm}$;
- électrique : $u(U) = u(I) = 0{,}01$ (en V et en A) ;
- glace : $u(m) = 0{,}1\,\mathrm{g}$; durée $u(\Delta t) = 30\,\mathrm{s}$.

Les incertitudes de mesure seules conduisent à $u(\bar{a}) \simeq 1{,}1\,\mathrm{K\,m^{-1}}$, soit environ 1,1 %. La dispersion entre les cinq dates (dérive du régime) est plus grande, $u(\bar{a}) \simeq 2{,}0\,\mathrm{K\,m^{-1}}$ (2,0 %), et domine. En combinant quadratiquement avec les autres termes, on obtient $u(\lambda_{\max}) \simeq 8$ et $u(\lambda_{\min}) \simeq 5\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

L'incertitude statistique est donc petite devant la **largeur de l'encadrement** ($\simeq 150\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$) : celle-ci est de nature *systématique* et provient des pertes thermiques, non d'un manque de précision sur les mesures.

Validité des hypothèses

- **Régime stationnaire.** La pente varie de 93 à $102\,\mathrm{K\,m^{-1}}$ sur la fenêtre retenue : le régime est seulement quasi stationnaire. Prolonger l'expérience ou prendre des mesures supplémentaires améliorerait la mesure, mais la durée de l'épreuve étant limité, je vous conseille de vous arrêter au bout d'une heure.
- **Pertes.** Le profil n'est pas parfaitement linéaire (les points s'écartent de la droite de 1 à 2 °C, cf. $R^2 \simeq 0{,}98$–$0{,}99$), mais la résolution de 1 °C ne permet pas de le mettre en évidence.

Limites et sources d'erreur systématique

- La borne basse $\lambda_{\min}$ n'est pas un strict minorant : la glace fond aussi par les apports de chaleur de l'air ambiant, ce qui *surestime* P_{glace} et donc $\lambda_{\min}$.
- La borne haute suppose que toute la puissance UI est transmise au barreau ; une partie est perdue au niveau de l'élément chauffant lui-même.
- L'aluminium commercial est un alliage : sa conductivité (de l'ordre de 150 à $200\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ selon l'alliage) est inférieure à celle de l'aluminium pur, ce qui peut expliquer en partie un résultat situé dans la partie basse de l'encadrement.

Conclusion

Le montage du barreau chauffant a permis de mesurer un gradient thermique de $\bar{a} = 98{,}2 \pm 2{,}0\,\mathrm{K\,m^{-1}}$ dans un barreau d'aluminium en régime quasi stationnaire. L'impossibilité de connaître directement le flux dans la zone de mesure conduit à un **encadrement** de la conductivité thermique :

$$208 \pm 5 \;\leq\; \lambda_{\mathrm{Al}} \;\leq\; 356 \pm 8 \;\; \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}},$$

qui contient la valeur tabulée de l'aluminium pur ($\simeq 237\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$). Les pertes latérales (environ 7 W sur 17,7 W) sont responsables de la largeur de l'intervalle.

Je n'espère pas, mais des coquilles peuvent se glisser dans ce document...

- H. Verrac - agrégé de Physique -