BTS Indus - Sciences Physiques

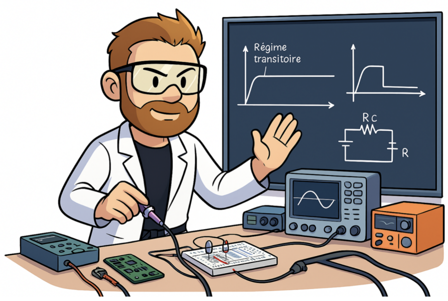
CIEL

Réponse Indicielle des systèmes linéaire d'ordre 1 et 2

Cours

v1.0

Lycée de Cachan – 63 Avenue du Président Wilson 94230 Cachan - Académie de Créteil



Compétences visées:

- Savoir représenter un signal de type échelon en fonction du temps.
- Savoir identifier le régime transitoire et le régime permanent.
- Savoir déterminer l'amplification statique T_0 d'un filtre passe-bas à partir de sa réponse à un échelon.
- Savoir déterminer la nature d'un filtre à partir de sa réponse indicielle.
- Savoir déterminer la constante de temps τ d'un système du premier ordre à partir de sa réponse à un échelon et connaître sa relation avec sa pulsation propre ω_0.
- Savoir mesurer le temps de réponse à 5% à partir de sa réponse à un échelon.
- Savoir discriminer un filtre du premier ordre d'un filtre du second ordre (tangente à l'origine, dépassement)
- Savoir déterminer les caractéristiques de la fonction de transfert d'un filtre du premier ordre ($T_0, \tau,_0$) et du second ordre ($T_0, m,_0$) à partir de sa réponse à un échelon et d'abaques.

I Introduction et Signaux Fondamentaux

A Le Signal Échelon $E(t)$

Définition : Signal Échelon Unitaire

Le signal échelon unitaire $u(t)$ est une fonction qui passe de la valeur nulle à l'unité de manière instantanée à l'instant $t = 0$. Le signal échelon d'amplitude E_0 est défini par :

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

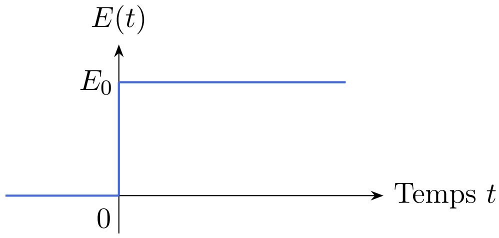


FIGURE 1 – Représentation d'un signal échelon

Remarque

Le signal échelon modélise de manière idéale toute variation brusque et instantanée de l'entrée d'un système, comme la fermeture d'un interrupteur ou l'application soudaine d'une grandeur physique (tension, force, débit). Il est fondamental pour l'étude de la réponse temporelle.

B Analyse de la Réponse Temporelle

Définition : Régimes Transitoire et Établi

La réponse $s(t)$ d'un système est caractérisée par :

- Le **Régime Transitoire** (rouge) ($t < t_r$) : Période initiale où la sortie évolue rapidement en fonction des propriétés dynamiques du système (constantes de temps, amortissement).
- Le **Régime Permanent** (bleu) ($t \geq t_r$) : Période où la sortie atteint et reste stable autour de sa valeur finale S_{final}.

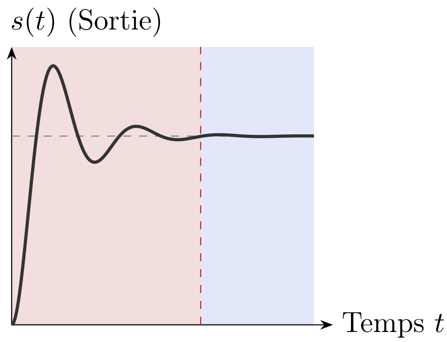


FIGURE 2 – Représentation du régime transitoire et permanent

C Comportement des dipôles fasse à un perturbation

C-1 Cas du condensateur idéal

Définition : Lien entre courant et tension dans un condensateur idéal

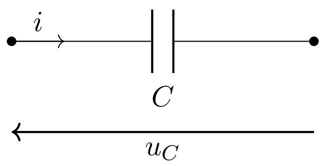


FIGURE 3 – Grandeurs aux bornes d'un condensateur

En convention récepteur, pour un condensateur idéal, l'intensité du courant électrique traversant le condensateur est proportionnelle à la dérivée de la tension à ses bornes par rapport au temps :

$$i = C \times \frac{du_C}{dt}$$

i : intensité traversant le condensateur idéal, en ampère (noté A)
C : capacité du condensateur idéal, dont l'unité est le farad (noté F)
u_C : tension aux bornes du condensateur idéal, en volt (noté V)

C-2 Cas de la bobine idéale

Définition : Lien entre courant et tension dans une bobine idéale

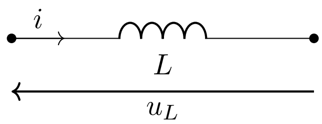


FIGURE 4 – Grandeurs aux bornes d'une bobine

En convention récepteur, pour une bobine idéale (sans résistance liée au fil de cuivre), la tension aux bornes de la bobine est proportionnelle à la dérivée de l'intensité par rapport au temps :

$$u_L = L \times \frac{di}{dt}$$

u_L : tension aux bornes de la bobine idéale, en volt (noté V)
L : inductance de la bobine idéale, dont l'unité est le henry (noté H)
i : intensité traversant la bobine idéale, en ampère (noté A)

II Systèmes du Premier Ordre : L'étude de la Lenteur

Prérequis mathématiques : résolution d'équations différentielles du premier ordre

Propriété : Équation différentielle du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre relie une fonction inconnue $x(t)$ à sa dérivée première $\frac{dx}{dt}$. En Terminale, on étudie principalement les équations de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x + b$$

Methode : Résolution d'une équation différentielle du premier ordre

1. Résoudre $\frac{dx}{dt} = 0$ pour trouver la solution particulière x_p.
2. Résoudre $\frac{dx}{dt} = a \cdot x$ pour trouver la solution homogène $x_h = C \cdot e^{at}$.
3. La solution générale est $x(t) = x_h + x_p$.
4. Utiliser les conditions initiales pour déterminer la constante C.

Exercice 1 **Résoudre les équations différentielles** (★★)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\frac{dx}{dt} = 3x + 2$ avec $x(0) = 1$

2. $\frac{dy}{dt} = -2y + 5$ avec $y(0) = 0$

A Fonction de Transfert et Formes Canoniques

A-1 Charge d'un circuit RC

Démonstration : Charge d'un circuit RC

A-2 Décharge d'un circuit RC

Démonstration : Décharge d'un circuit RC

A-3 Établissement du courant dans un circuit RL

Démonstration : Établissement du courant dans un circuit RL

B Détermination des Caractéristiques par Lecture Graphique

B-1 Amplification Statique T_0

Propriété : Détermination de T_0

L'amplification statique T_0 se détermine uniquement à partir du régime établi (permanent) de la réponse indicielle :

$$T_0 = \frac{S_{final}}{E_0} = \frac{\text{Valeur de sortie en régime établi}}{\text{Amplitude de l'échelon d'entrée}}$$

Exercice 2 **Déterminer l'amplification statique** (★)

On considère un échelon d'amplitude $E_0 = 1\ V$. On trace ci-dessous l'évolution de la tension à la sortie de trois systèmes différents (numérotés 1, 2 et 3).

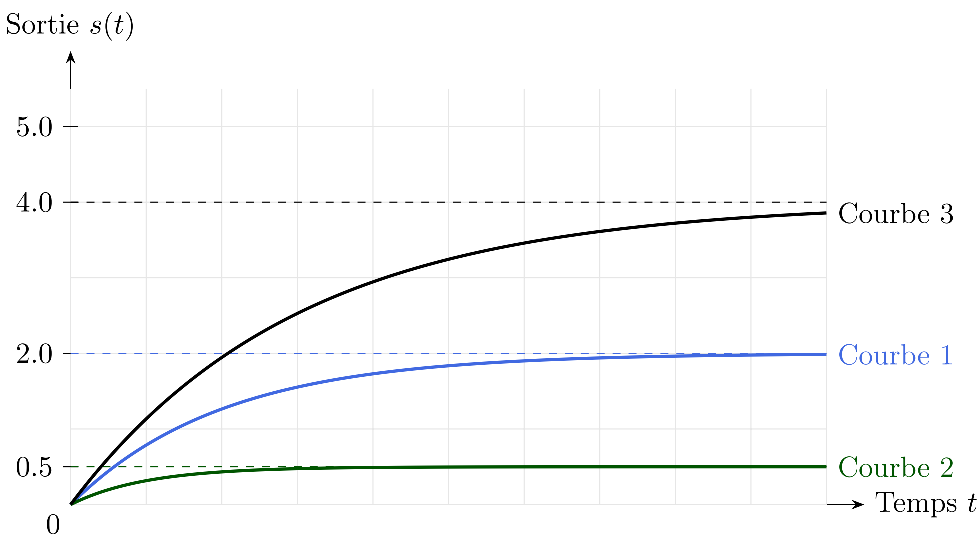


FIGURE 5 – Réponses indicielles de trois systèmes du premier ordre

Q1 Déterminer, en justifiant par un calcul, l'amplification statique.

B-2 Constante de Temps τ et Pulsation Propre ω_0

Propriété : Détermination de τ et ω_0

La constante de temps τ peut être déterminée graphiquement de deux manières principales :

1. Par le **point à 63%** : τ est l'instant où la réponse $s(t)$ atteint 63% de sa variation totale.
2. Par la **tangente à l'origine** : τ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine avec la droite du régime établi (S_{final}).

La **pulsation propre** ω_0 est liée à τ par la relation :

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} \quad \text{(en rad/s)}$$

Attention : Différence entre charge et décharge

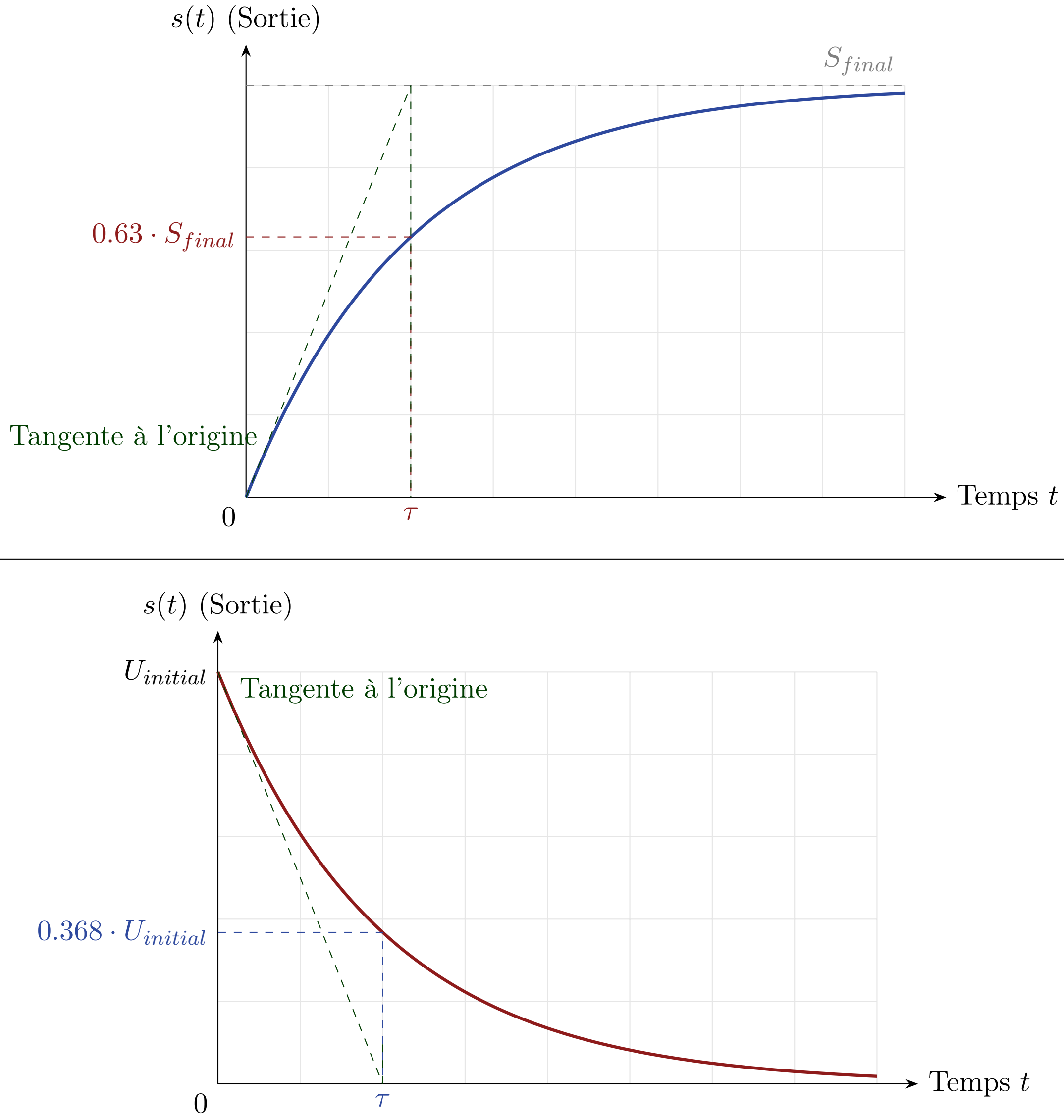


Figure 6 – Réponse indicielle d'un condensateur qui se charge et qui se décharge

Exercice 3 Déterminer des constantes de temps (★ ★)

On trace ci-dessous les réponses indicielles de 4 systèmes différents.

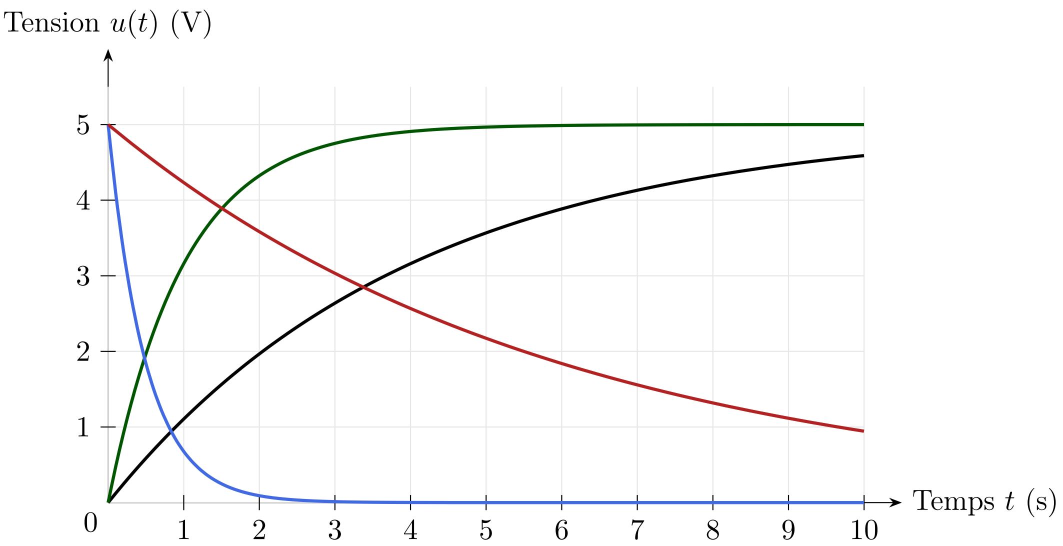


FIGURE 7 – Détermination de τ pour différentes réponses de systèmes du premier ordre.

Q1 Indiquer lesquelles correspondent à des charges et lesquelles correspondent à des décharges.

Q2 Indiquer pour chacune la valeur de la constante τ ainsi que celle de la pulsation propre ω_0 en remplissant le tableau suivant :

	Constante de temps τ	Pulsation propre ω_0
Courbe bleue		
Courbe verte		
Courbe rouge		
Courbe noire		

III Systèmes du Second Ordre : Oscillation et Amortissement

A Fonction de Transfert et Paramètres Canoniques

Démonstration : Établissement de la tension dans un circuit RLC

A-1 Critère de Rapidité

Définition : Temps de Réponse à 5%

Le temps de réponse à 5%, noté $t_{r5\%}$, est le temps au bout duquel la sortie $s(t)$ du système entre et ne quitte plus l'intervalle $[0,95S_{final}; 1,05S_{final}]$.

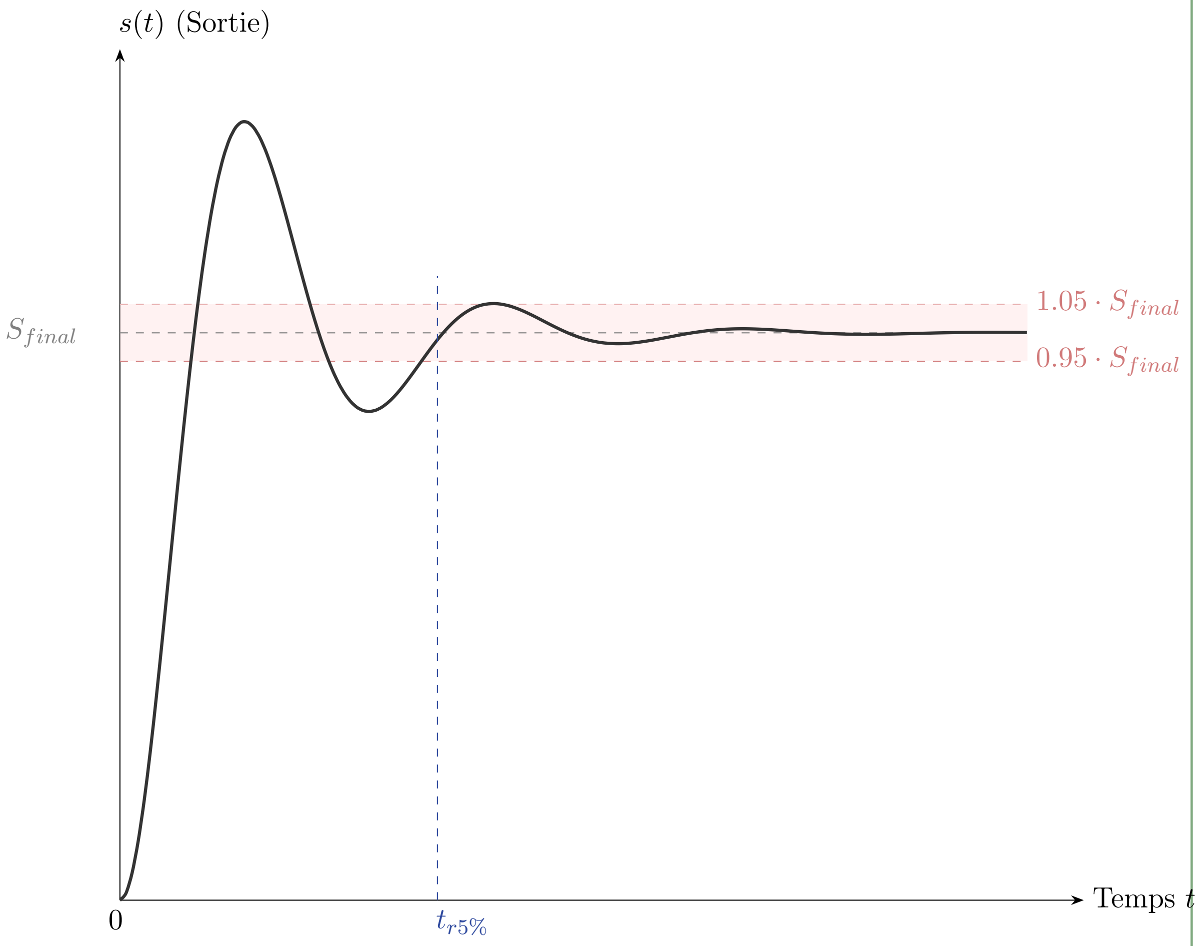


FIGURE 8 – Temps de réponse à 5%

Remarque

Pour un système d'ordre 1, on a : $t_{r5\%} \simeq 3\tau$

Exercice 4 Calcul du Temps de Réponse à 5% (★★)

On trace ci-dessous la réponse indicielle d'un système du premier ordre.

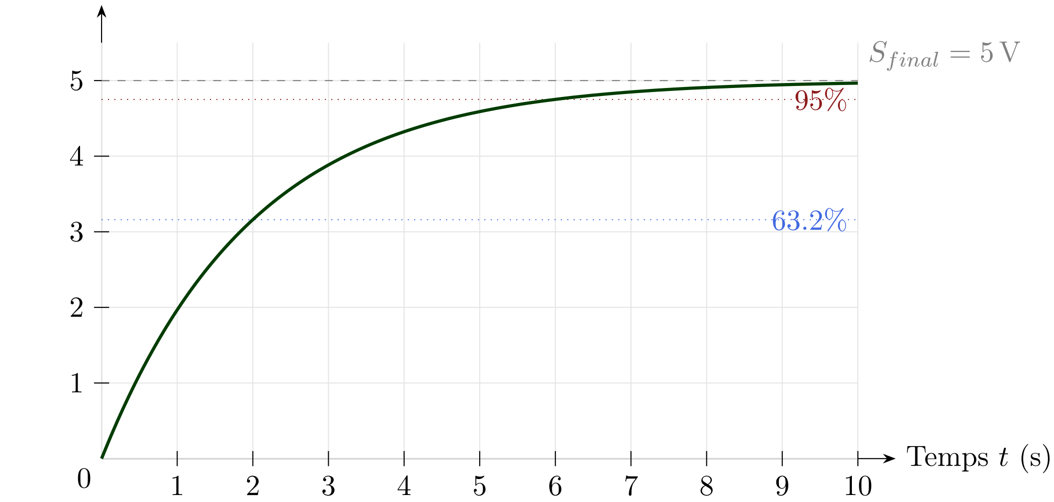


FIGURE 9 – Réponse indicielle d'un système du premier ordre.

Q1 Déterminer graphiquement la constante de temps τ de ce système. Détailler la méthode utilisée (en vous aidant de la ligne 63.2%).

Q2 En utilisant la ligne de seuil 95%, déterminer graphiquement le temps de réponse à 5%, $t_{r5\%}$, de ce système.

Q3 Retrouver la relation théorique $t_{r5\%}$ en fonction de τ en partant de la formule de la réponse indicielle.

$$s(t_{r5\%}) = S_{final} \cdot (1 - e^{-t_{r5\%}/\tau})$$

Q4 Compléter le tableau récapitulatif :

Valeur de τ	**Valeur de $t_{r5\%}$**	**Rapport $t_{r5\%}/\tau$**

Exercice 5 **Temps de Réponse $t_{r5\%}$ pour le Second Ordre) (★★)**

On trace ci-dessous les réponses indicielles de deux systèmes du second ordre soumis à un échelon unitaire ($E_0 = 1\,\mathrm{V}$). Le gain statique est $T_0 = 1$.

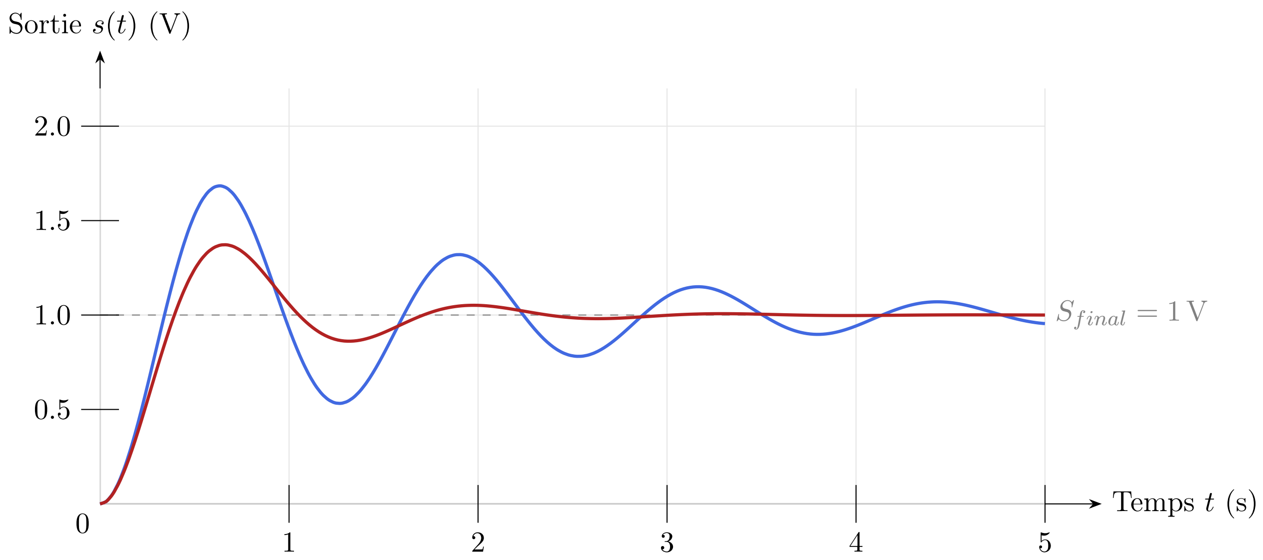


FIGURE 10 – Réponses indicielles de deux systèmes du second ordre sous-amortis ($\omega_0 = 5\,\mathrm{rad/s}$)

Q1 Placer sur le graphique ci-dessus la bande de ±5% autour de S_{final} pour les systèmes de cette figure.

Q2 En utilisant le critère de la bande de ±5%, déterminer graphiquement la valeur approximative du temps de réponse $t_{r5\%}$ pour les deux courbes. $t_{r5\%}$ est le moment où la courbe entre dans la bande et n'en sort plus.

Courbe	Temps de Réponse $t_{r5\%}$ (lecture graphique)
Courbe A ($m = 0.1$)	
Courbe B ($m = 0.3$)	

Q3 En comparant les résultats, quelle est l'influence du facteur d'amortissement m sur le temps de réponse $t_{r5\%}$ dans le cas sous-amorti ($m < 1$) ? Justifier.

B Détermination des Caractéristiques

Propriété : Détermination de m et ω_0

La détermination des paramètres utilise :

1. **Le Gain Statique T_0 :** Identique au premier ordre,
$$T_0 = \frac{S_{final}}{E_0}$$
.
2. **Le Facteur d'Amortissement m :**
On mesure le **temps de réponse** $t_{r5\%}$ sur le graphique, puis on se sert d'un abaque :

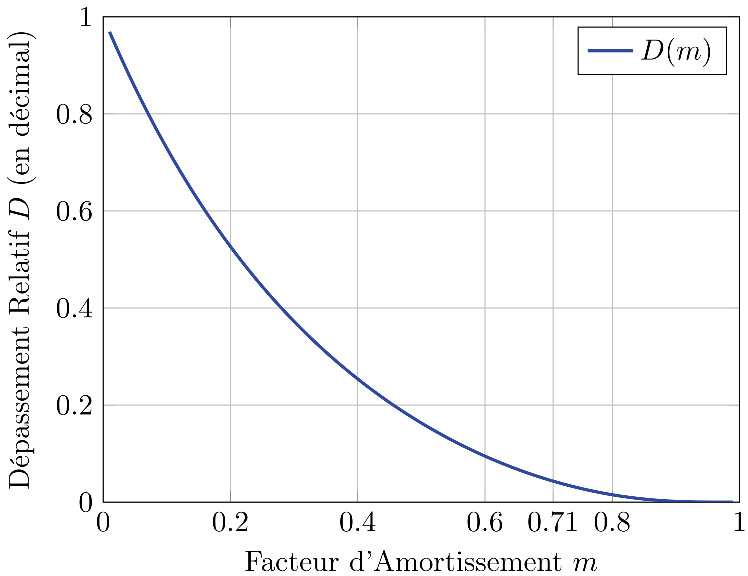


FIGURE 11 – Abaque Dépassement Relatif D vs. Facteur d'Amortissement m

3. **La Pulsation Propre ω_0** : La détermination de ω_0 nécessite deux étapes, car la mesure graphique donne la pulsation amortie ω_d.
   - **Mesure de la Pulsation Amortie ω_d** : On mesure la pseudo-période T_d (durée entre deux pics successifs) et on calcule ω_d :
   $$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$$
   - **Calcul de ω_0** : On remonte à ω_0 en utilisant m et ω_d :
   $$\omega_0 = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-m^2}}$$

Remarque

Si $m \ll 1$ alors $\omega_0 \simeq w_d$. Autrement dit, s'il y a beaucoup de pseudo-périodes, alors la période propre est presque égale à la période amortie.

Exercice 6 Caractérisation d'un Système du Second Ordre (★★★)

Le graphique ci-dessous présente la réponse indicielle de deux systèmes du second ordre soumis à un échelon d'amplitude $E_0 = 1\,\text{V}$.

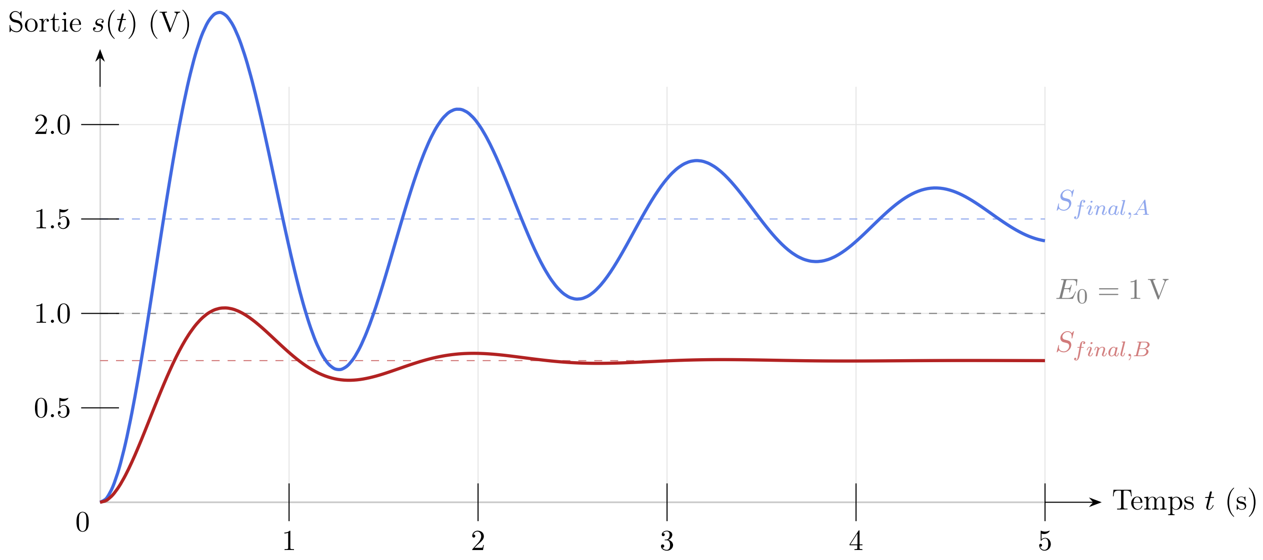


FIGURE 12 – Réponses indicielles de deux systèmes du second ordre sous-amortis.

Q1 Compléter le tableau suivant.

Courbe	T_0	m	ω_0 (rad/s)	$t_{r5\%}$ (s)
Courbe rouge				
Courbe bleue				

Remarque

Il sera utile d'utiliser l'abaque présentée dans la partie B.

C Discrimination Premier / Second Ordre

Propriété : Discrimination

La nature du système se discrimine principalement par deux signatures sur la réponse indicielle :
- **Tangente à l'origine :** La réponse d'un second ordre part avec une **pente nulle** (tangente horizontale), ce qui n'est pas le cas du premier ordre.
- **Dépassement :** Si $m < 1$, la réponse présente un **dépassement** (D) au-dessus de S_{final}. La présence d'un dépassement signe immédiatement un système du second ordre sous-amorti.

Exercice 7 **Reconnaissance de Systèmes Dynamiques (★★)**

Le graphique ci-dessous présente les réponses indicielles de quatre systèmes dynamiques différents, répartis en 2x2. L'amplitude de l'échelon d'entrée est $E_0 = 1\,\mathrm{V}$ pour les charges, et la valeur initiale est $1\,\mathrm{V}$ pour les décharges.

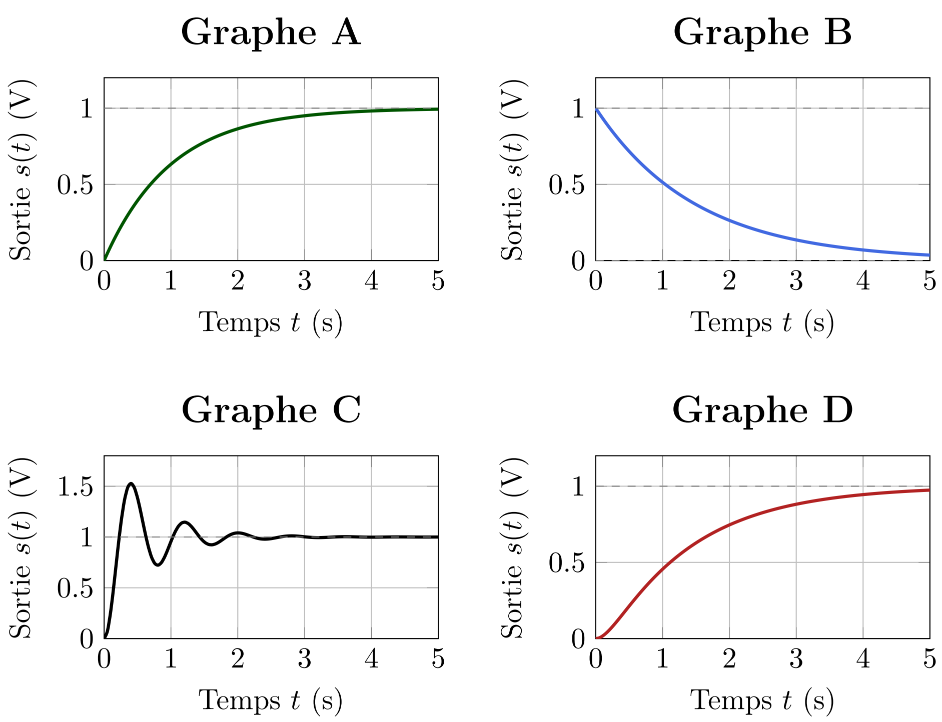


FIGURE 13 – Réponses indicielles de quatre systèmes dynamiques différents.

Q1 Pour chaque graphe (A, B, C, D), identifier la nature du système en précisant :
1. Son **ordre** (premier ordre ou second ordre).
2. Son **type de réponse** (charge, décharge, sous-amorti, sur-amorti).

Graphe	Ordre	Type de Réponse
A		
B		
C		
D		