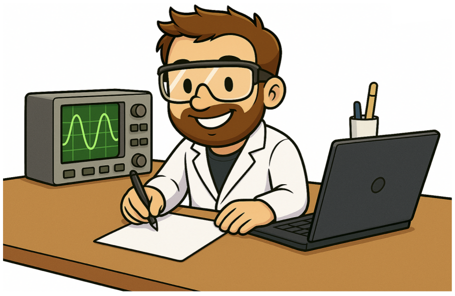
Filtrage numérique

Cours

v1.0

Lycée de Cachan – 63 Avenue du Président Wilson 94230 Cachan - Académie de Créteil



Compétences visées:

- Savoir identifier une équation de récurrence récursive ou non récursive
- Savoir représenter le schéma structurel associé à une équation de récurrence et réciproquement
- Savoir qu'une équation de récurrence non récursive traduit le fonctionnement d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)
- Savoir qu'un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) est toujours stable
- Savoir qu'un filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) peut-être instable
- Savoir identifier un filtre numérique stable ou instable à partir de sa réponse impulsionnelle ou indicielle
- Savoir déterminer la ou les fréquences de coupure à -3 dB à partir de la courbe de l'amplification en fonction de la fréquence ou fréquence réduite
- avoir justifier la limite de tracé en abscisse à f=fe/2 ou f/fe = 1/2 de la courbe d'amplification (fe étant la fréquence d'échantillonnage)

Table des matières

I Introduction

A Différences entre filtrage numérique et analogique

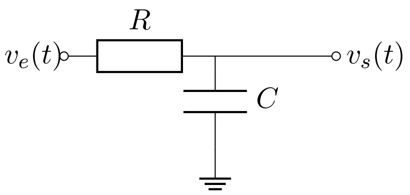


FIGURE 1 – Filtre analogique passe-bas

- Il se fait directement sur le **signal continu** (temporel).
- Il utilise des **composants électroniques** physiques (résistances, condensateurs, inductances).
- Le comportement est régi par une **équation différentielle**.

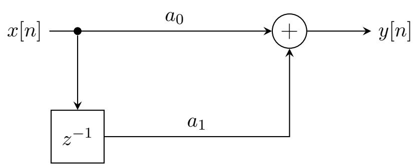


FIGURE 2 – Schéma bloc d'un filtre RIF

- Il nécessite une conversion préalable par un **CAN**.
- Il utilise des **algorithmes mathématiques** (calculs sur des suites de nombres).
- Le comportement est régi par une **équation de récurrence**.

Propriété : Bilan

En résumé, le filtrage **analogique** agit directement sur le **signal continu** avec des **composants physiques**, tandis que le filtrage **numérique** manipule des **échantillons** (nombres) en utilisant des **opérateurs mathématiques** (addition, multiplication, retard).

A-1 Convertisseur Analogique Numérique (CAN)

Définition : Échantillonnage

L'échantillonnage consiste à prélever des valeurs du signal analogique à **intervalles de temps réguliers** T_e.

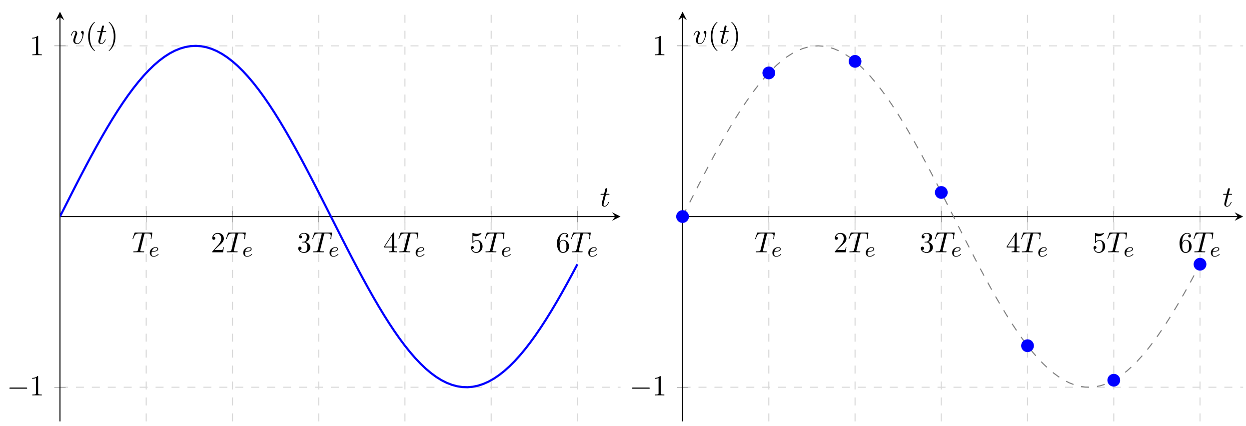


FIGURE 3 – Échantillonnage temporel d'un signal sinusoïdal

A-2 Théorème de Shannon-Nyquist

Toute la qualité de la numérisation réside dans le choix de la période T_e. Pour cela il faut respecter une règle.

Formule : Théorème de Shannon

Pour pouvoir reconstruire fidèlement le signal d'origine sans perte d'information, la **fréquence d'échantillonnage** f_e doit être au moins **deux fois supérieure** à la **fréquence maximale** f_{max} du signal :

$$f_e \geq 2 \cdot f_{max}$$

Signal bien échantillonné **Signal sous-échantillonné**

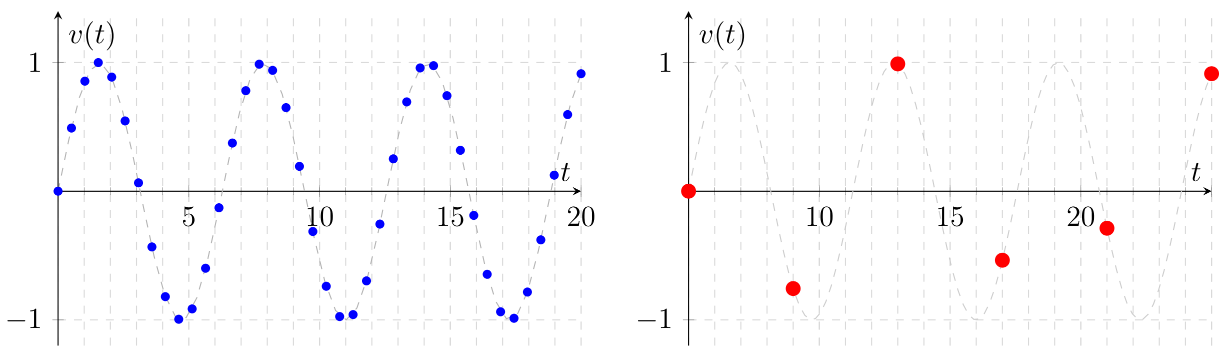


FIGURE 4 – Différence entre deux choix de période d'échantillonnage

Attention : Conséquence du sous-échantillonnage

Dans le second graphe, la fréquence d'échantillonnage est trop faible. On observe un **repliement de spectre** : les points rouges semblent dessiner un signal beaucoup plus lent (courbe en pointillés rouges). L'information d'origine est **perdue**.

Exercice 1 Condition de Shannon (★)

Un signal audio contient des fréquences allant jusqu'à **15 kHz**.

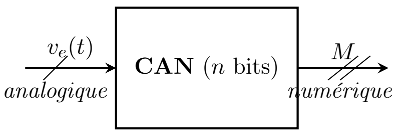
Q1 Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale $f_{e,min}$?

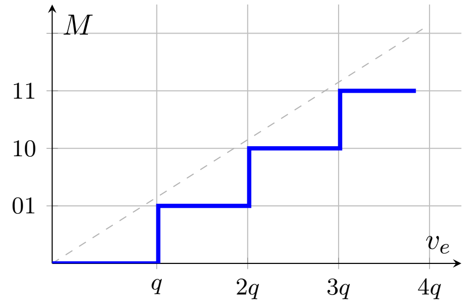
Q2 On utilise un CD audio échantillonné à **44,1 kHz**. Le critère est-il respecté ?

A-3 La Quantification : Le système CAN

Définition : Convertisseur Analogique-Numérique

Le **Convertisseur Analogique-Numérique (CAN)** transforme chaque échantillon de tension en un **nombre binaire**.





Formule : Le Quantum

La précision de la numérisation est définie par le **quantum** q, qui est la plus petite variation de tension que le CAN peut détecter :

$$q = \frac{U_{max} - U_{min}}{2^n}$$

Où n est le nombre de bits (la résolution) du convertisseur.

Attention : Critères de bon fonctionnement

- **Saturation :** La pleine échelle ΔU doit être **supérieure** à la tension crête à crête du signal (V_{pp}).

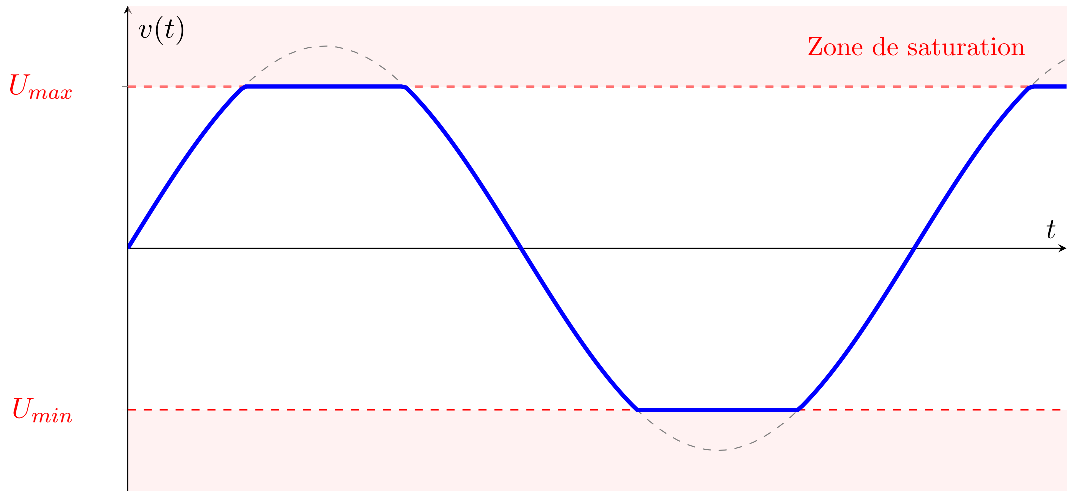


FIGURE 5 – Écrêtage du signal lorsque V_{pp} dépasse la pleine échelle ΔU

- **Vitesse :** Le **temps de conversion** T_{CAN} doit être inférieur à la **période d'échantillonnage** :

$$T_{CAN} < T_e$$

Exercice 2 **Dimensionnement d'un CAN** (★)

On utilise un CAN de résolution **10 bits** avec une pleine échelle de **0 à 10,24 V**.

Q1 Calculez la valeur du **quantum** q en millivolts.

Q2 Si le signal d'entrée vaut $V_e = 4,1$ V, quelle est la valeur décimale M en sortie ?

Q3 Le CAN met **20** μs pour convertir. Quelle est la fréquence d'échantillonnage maximale possible ?

II Étude dans l'espace temporel

A Principe du filtrage numérique

Définition : Principe et notation

Lors de **l'échantillonnage** d'un signal avec une **période d'échantillonnage** notée T_e, on obtient une **suite de nombres**. On note $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ la suite de nombres en entrée (c'est cette suite de nombres qui sera alors modifiée par un **algorithme**).

L'indice n correspond à la **position** du nombre dans la suite (son rang).
Le filtrage numérique est une étape de traitement du signal qui consiste à réaliser des opérations avec ces nombres x_n. On note y_n la suite de nombres en sortie.

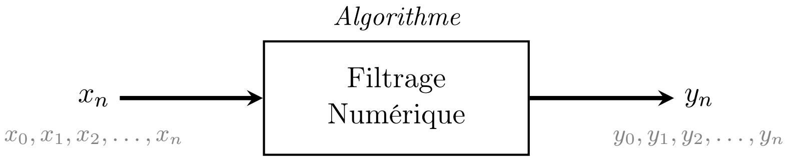


FIGURE 6 – Principe de traitement d'un filtre numérique

A-1 Types de filtres et stabilité

Définition : Filtre non-récursif

Un filtre est dit **non-récursif** lorsque sa sortie y_n à l'instant n ne dépend que des valeurs présentes et passées du signal d'entrée x. Il n'y a aucune boucle de retour.

Propriété : Stabilité

Les filtres RIF sont **toujours stables** par nature (stabilité intrinsèque).

A-2 Filtres Récursifs (IIR)

Définition : Filtre récursif (RII

Un filtre est dit **récursif** lorsque sa sortie y_n dépend non seulement des valeurs de l'entrée x, mais également de ses propres valeurs passées $(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots)$. Cette structure implique une boucle de rétroaction.

Propriété : Stabilité

La stabilité d'un filtre récursif n'est **pas garantie** et dépend de coefficient.

B Équation de récurrence d'un filtre numérique

Définition :

L'**équation de récurrence** est l'algorithme mathématique qui permet de calculer l'échantillon de sortie y_n à partir des échantillons d'entrée et/ou des sorties précédentes. C'est l'équivalent numérique de l'équation différentielle.

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} a_i \cdot x_{n-i} - \sum_{j=1}^{N} b_j \cdot y_{n-j}$$

Où :

- x_n : échantillon d'entrée à l'instant présent $t = n \cdot T_e$.
- x_{n-i} : échantillons d'entrée **passés** (retardés de $i \cdot T_e$).
- y_n : échantillon de sortie calculé à l'instant présent.
- y_{n-j} : échantillons de sortie **précédemment calculés** (récurrence).
- a_i et b_j : les **coefficients** du filtre.

Exercice 3 Calcul d'une suite de sortie (★)

On considère un filtre numérique dont l'équation de récurrence est la suivante :

$$y_n = 0,5 \cdot x_n + 0,5 \cdot x_{n-1}$$

Le signal d'entrée est défini par la suite d'échantillons suivante :
$x_0 = 10, \quad x_1 = 20, \quad x_2 = 20, \quad x_3 = 10$
On admet qu'avant le début du signal, tous les échantillons sont nuls ($x_{-1} = 0$).

Q1 Calculez les valeurs successives de la sortie : y_0, y_1, y_2 et y_3.

Q2 Complétez le tableau de synthèse ci-dessous.

n	**0**	**1**	**2**	**3**
x_n	10	20	20	10
x_{n-1}	0	10	20	20
y_n				

Exercice 4 Identification et calcul RIF (★★)

Un filtre numérique possède l'équation de récurrence suivante :

$$y_n = 2 \cdot x_n - 1,5 \cdot x_{n-1} + 0,5 \cdot x_{n-2}$$

Q1 Identifiez les valeurs des coefficients a_0, a_1 et a_2 de ce filtre.

Q2 On donne la suite d'entrée : $x_0 = 10$; $x_1 = 10$; $x_2 = 0$. On admet que $x_n = 0$ pour $n < 0$. Calculez y_0, y_1 et y_2.

Exercice 5 Filtre récursif (RII) (★★★)

On considère un filtre dont la sortie "s'auto-alimente" pour lisser le signal :

$$y_n = 0,2 \cdot x_n + 0,8 \cdot y_{n-1}$$

Q1 Si x_n est un échelon unité ($x_n = 1$ pour $n \geq 0$) et que $y_{-1} = 0$, calculez les trois premières valeurs de la sortie.

Exercice 6 Analyse graphique d'un filtre (★★)

On injecte un signal en échantillonné dans un filtre numérique dont l'objectif est de lisser les variations brusques. L'équation de récurrence du filtre est :

$$y_n = 0,4 \cdot x_n + 0,6 \cdot y_{n-1}$$

On donne ci-dessous le signal d'entrée x_n. On considère que la sortie est initialement nulle : $y_{-1} = 0$.

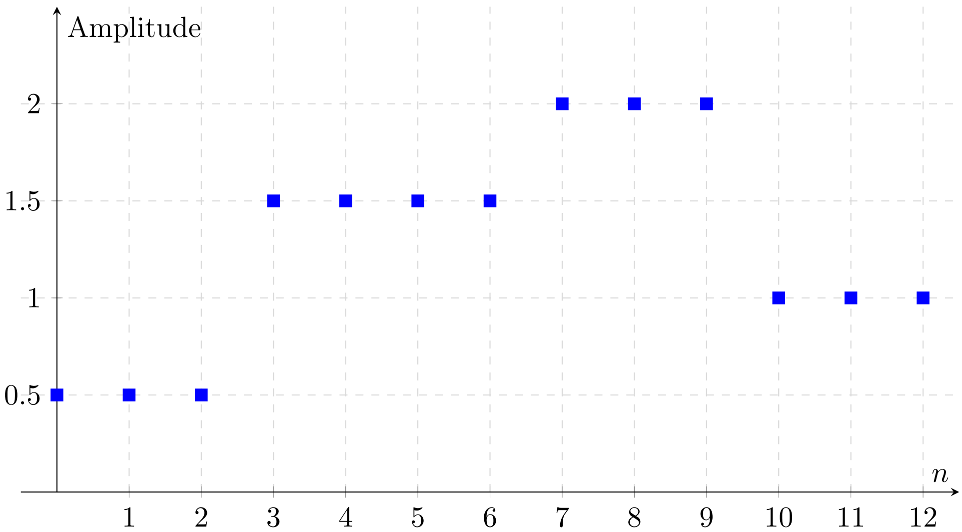


Figure 7 – Graphique à compléter

Q1 Complétez les valeurs dans le tableau ci-dessous.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	...
x_n									
y_{n-1}									
y_n									

Q2 Placez les points y_n sur le graphique. Que remarquez-vous au niveau des "marches" de l'escalier ?

Q3 Ce filtre est-il efficace pour supprimer les transitions instantanées ?

C Schéma bloc d'un filtre numérique

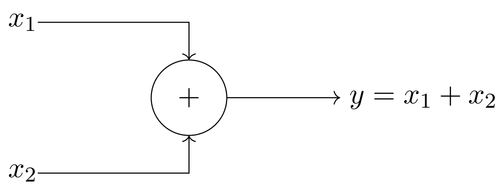
Définition : Principe

Un **schéma bloc** permet de représenter graphiquement l'algorithme d'un filtre numérique.
Chaque opération mathématique est représentée par une **brique élémentaire**. Les signaux sont représentés par des **flèches** reliant les blocs.
Les filtres numériques sont construits à partir de trois briques fondamentales :

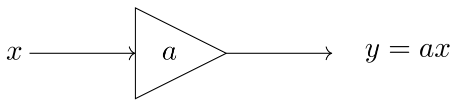
- l'**addition**
- la **multiplication par un coefficient**
- le **retard d'un échantillon** (T_e)

Propriété : Les trois briques élémentaires

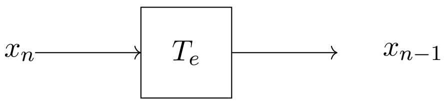
Addition de deux signaux



Multiplication par un coefficient



Retard d'un échantillon

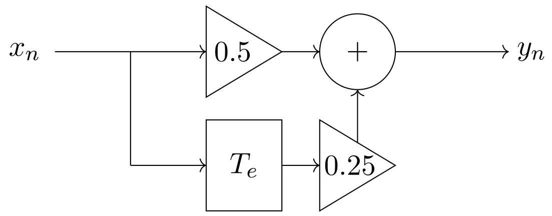


Définition : Construction d'un filtre numérique

Un filtre numérique est obtenu en **combinant ces blocs élémentaires**.
Le schéma bloc permet alors :
- de **visualiser la structure** du filtre,
- d'**établir l'équation de récurrence** correspondante.

Exercice 7 Lecture d'un schéma bloc simple (★)

On considère le schéma bloc suivant :

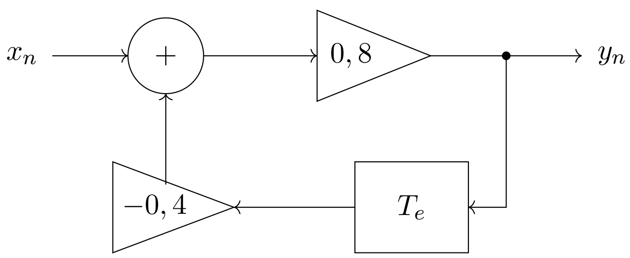


Q1 Identifiez les deux signaux qui sont additionnés.

Q2 Établissez l'équation de récurrence reliant y_n à x_n et x_{n-1}.

Exercice 8 Analyse d'un filtre plus complexe (★ ★)

On considère le schéma bloc du système numérique suivant, comportant une boucle de retour :



Q1 Ce filtre est-il de nature transversale (RIF) ou récursive (RII) ? Justifiez votre réponse en observant le sens de circulation des signaux.

Q2 En notant w_n le signal sortant de l'additionneur, exprimez w_n en fonction de x_n et de la valeur précédente de la sortie y_{n-1}.

Q3 Établissez l'équation de récurrence finale reliant directement y_n à x_n et y_{n-1}.

Exercice 9 **Du schéma bloc vers l'équation complète** (★ ★ ★)

On considère un filtre numérique constitué des opérations suivantes :

- le signal d'entrée x_n est multiplié par $0,6$,
- le signal retardé x_{n-1} est multiplié par $0,3$,
- le signal retardé x_{n-2} est multiplié par $0,1$,
- les trois signaux sont ensuite additionnés.

Q1 Dessinez le schéma bloc correspondant.

Q2 Écrivez l'équation de récurrence du filtre.

Anciens sujets pour s'entraîner

Exercice 10 SNEC 2020 (★★★)

Problématique : en manipulant le container, le cavalier subit une vibration supposée sinusoïdale de fréquence 2 Hz d'amplitude 50 cm. Cette composante se superpose aux coordonnées relevées par le récepteur GPS. Cette composante indésirable doit être supprimée. On l'estime supprimée si l'erreur de positionnement est inférieure à 1 cm.

Pour supprimer ces composantes indésirables, il est nécessaire d'introduire un filtre numérique traitant les échantillons d'entrée correspondant aux coordonnées GPS acquises notées α_n et β_n. Le technicien utilise l'outil de conception présenté figure 11 dont la fréquence d'échantillonnage, la nature du filtre, la fréquence de coupure et l'ordre ont été configurés pour répondre à la problématique. Cette application calcule les coefficients a_n et b_n qui seront implantés dans l'algorithme du filtre numérique.

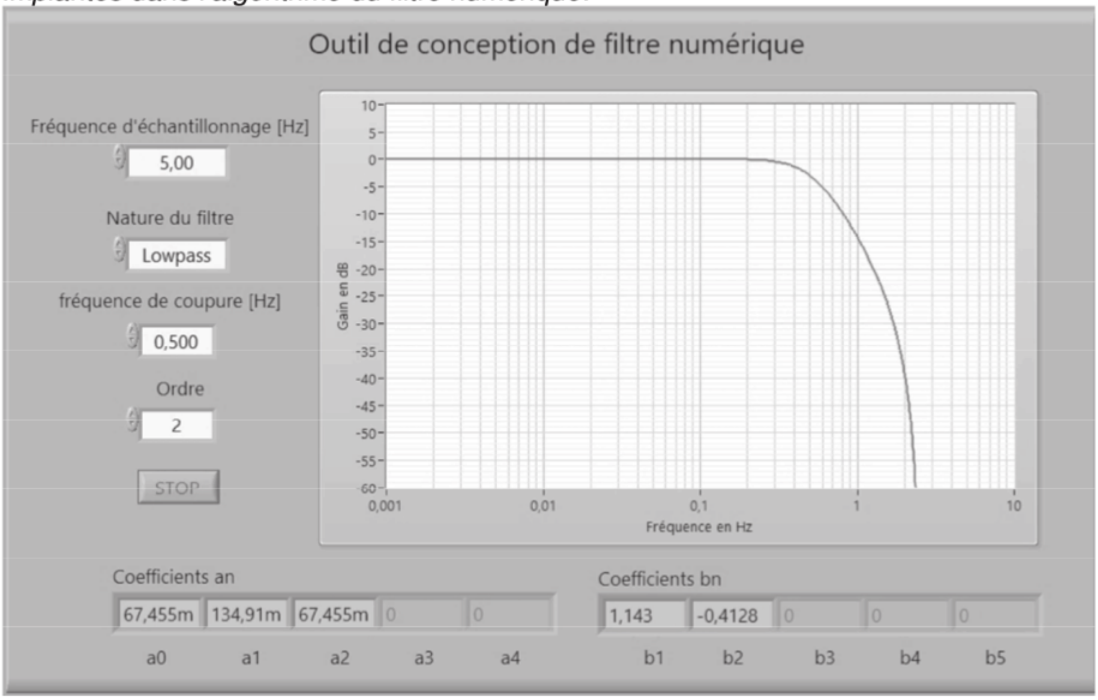


Figure 11 : diagramme de Bode du filtre

Le récepteur permet de récupérer les coordonnées α_n et β_n à un intervalle de traitement configurable. Les valeurs d'intervalles possibles sont : 30 s, 10 s, 1 s, 0,2 s, 0,05 s ou 0,02s.

Q63. Déterminer l'intervalle de traitement choisi par l'outil de conception. Justifier votre réponse.

Q64. Montrer que la fréquence d'échantillonnage est compatible avec la condition de Shannon.

La structure du filtre associée aux coefficients a_n et b_n donnés par l'outil de conception est représentée sur la figure 12. La grandeur d'entrée, e_n, la grandeur de sortie, s_n correspondent aux latitudes ou longitudes acquises et traitées.

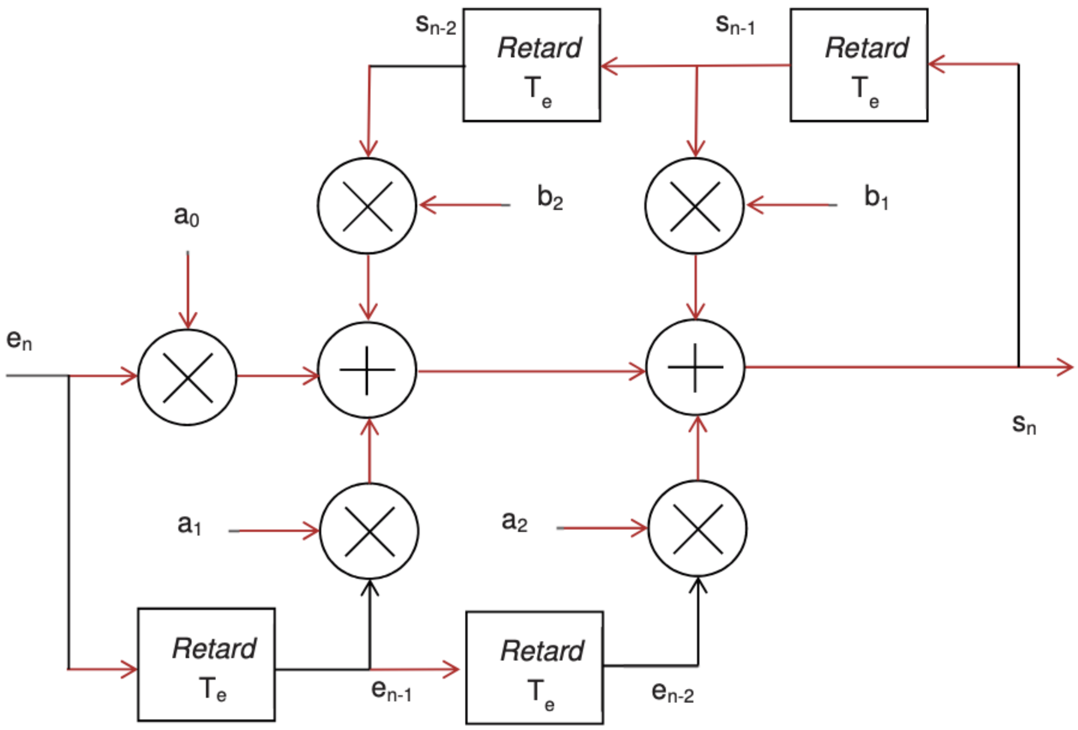


Figure 12 : structure du filtre

Q65. Donner à partir de la figure 12 l'équation de récurrence s_n en fonction de l'entrée e_n, des échantillons antérieurs e_{n-1}, e_{n-2}, s_{n-1}, *et* s_{n-2} et des coefficients a_0, a_1, a_2, b_1 *et* b_2.

Q66. Indiquer s'il s'agit d'un filtre récursif ou non récursif en le justifiant.

Pour étudier la stabilité du filtre numérique la réponse impulsionnelle suivante est simulée :

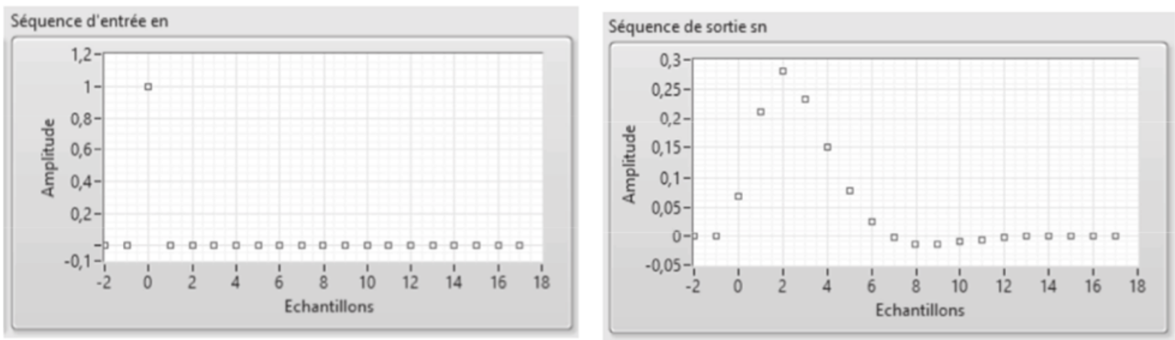


Figure 13 : réponse impulsionnelle

Q67. Justifier la stabilité de ce filtre.

Q68. Donner l'atténuation en dB subie par la composante indésirable de fréquence 2 Hz, à partir diagramme de Bode du filtre configuré à la figure 11

Q69. Indiquer si ce filtre permet de répondre à la problématique.

Exercice 11 SNIR 2018 (★★★)

Pour respecter le deuxième point du cahier des charges, un filtre d'émission est utilisé. La représentation, figure 3, donne la densité spectrale de puissance (DSP) du flux binaire brut et la DSP du flux binaire après filtrage.

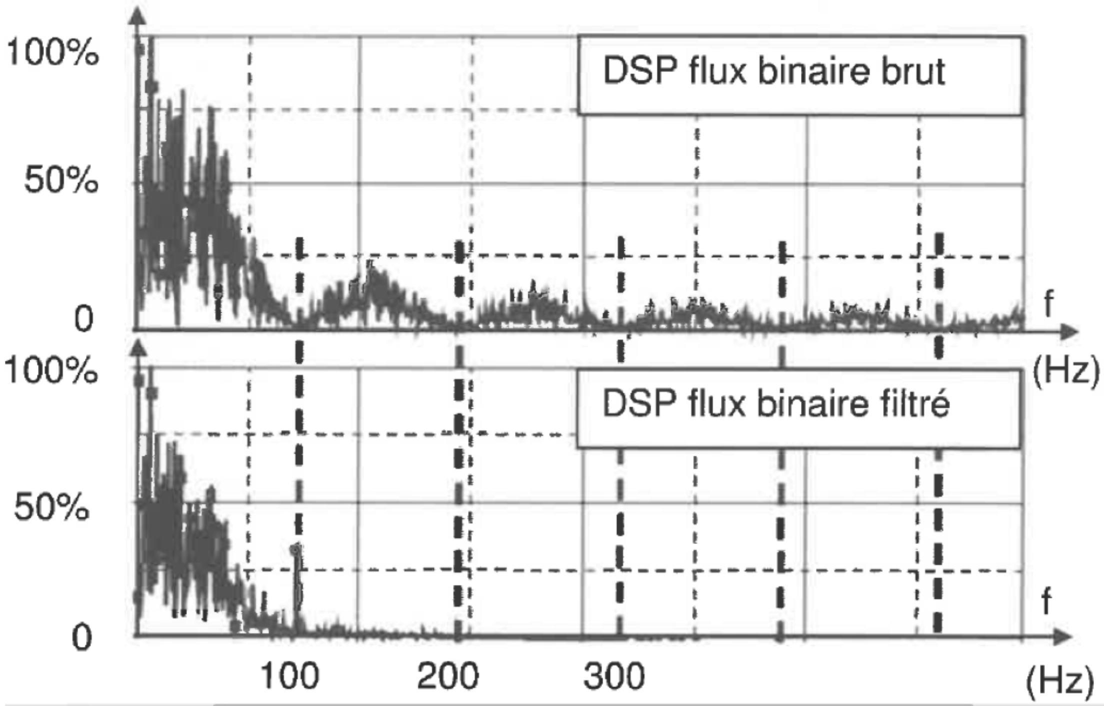


Figure 3 : DSP du flux binaire brut puis filtré

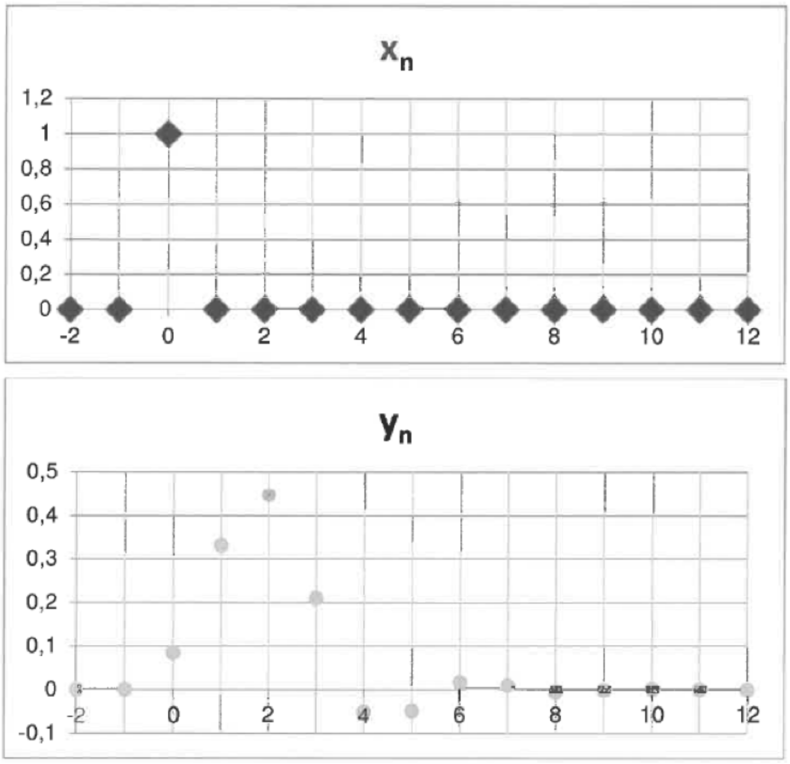
Q34. Donner la nature (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande) du filtre permettant de réaliser le filtrage du flux binaire.
Ce filtre est réalisé de manière numérique.

L'équation de récurrence associée à ce filtre de signaux d'entrée Xn et de sortie Yn, échantillonnés à la fréquence fe = 1000 Hz, est la suivante :

$$y_n = 0{,}085\cdot x_n + 0{,}34\cdot x_{n-1} + 0{,}51\cdot x_{n-2} + 0{,}34\cdot x_{n-3} + 0{,}085\cdot x_{n-4} - 0{,}1\cdot y_{n-1} - 0{,}255\cdot y_{n-2} + 1{,}76\cdot 10^{-3}\cdot y_{n-3} - 5{,}09\cdot 10^{-3}\cdot y_{n-4}$$

Q35. Justifier la récursivité ou la non récursivité de ce filtre.

Q36. Compléter la structure du filtre sur le document réponses page DR-SP1.
La réponse {Yn} à l'impulsion unité {xn} de ce filtre est donnée ci-dessous figure 4.



n	x_n	y_n
-4	0	0
-3	0	0
-2	0	0
-1	0	0
0	1	0,08500
1	0	0,33150
2	0	0,455
3	0	0,20991
4	0	-0,05217
5	0	-0,04932
6	0	0,01632
7	0	0,00981
8	0	-0,00497
9	0	-0,00173
10	0	0,00138
11	0	0,00025
12	0	-0,00036

Figure 4 : réponse impulsionnelle unité

Q37. Exploiter les courbes de la figure 4 et conclure quant à la stabilité de ce filtre.