Représentation fréquentielle des signaux

Plan du cours

Exercices

Voir fiche TD

Voir Activité et Application

Tous les cours en ligne !

PhysicSensei.fr

I Formalisme mathématique des signaux périodiques et théorème de Fourier

A Signal sinusoïdal

Propriété

La forme générale d'un signal sinusoïdal est donnée par l'expression :

$$s(t) = A \times \sin(2\pi f t + \varphi)$$

où :

- A est l'amplitude du signal, qui représente la valeur maximale du signal (en volt par exemple).
- f est la fréquence du signal, exprimée en hertz (Hz), qui indique combien de cycles complets sont effectués par seconde.
- t est le temps, généralement exprimé en secondes.
- φ est la phase initiale du signal, exprimée en radians, qui représente le décalage temporel du signal par rapport à l'origine.

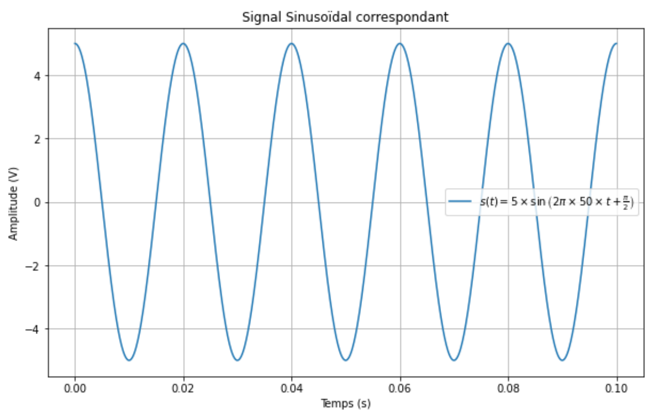
Exemple

Un exemple simple de signal sinusoïdal est donné par :

$$s(t) = 5 \times \sin\left(2\pi \times 50 \times t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dans cet exemple :

- L'amplitude est $A = 5$ volts.
- La fréquence est $f = 50$ Hz.
- La phase initiale est $\varphi = \frac{\pi}{4}$ radians.



B Théorème de Fourier

B.1 Théorème de Fourier

Définition

Tout signal périodique $u(t)$, de fréquence f_0, peut être décomposé en une somme discrète :

- de sa composante continue, de fréquence nulle et de valeur égale à sa valeur moyenne, notée $\langle u \rangle$,
- de signaux sinusoïdaux alternatifs de fréquence multiple entier de f_0.

Une animation est disponible en ligne !

Propriété

Tout signal périodique $s(t)$, de fréquence f_0, peut être décomposé en une somme discrète :

$$u(t) = \langle u \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \times \sin\left(2 \times \pi \times f_n \times t + \varphi_n\right)$$

avec f_n : fréquence du signal sinusoïdal alternatif de rang n, en hertz
A_n : amplitude du signal sinusoïdal alternatif de rang n, en volt
φ_n : phase à l'origine du signal sinusoïdal alternatif de rang n, en radians
Les fréquences des différents signaux sinusoïdaux alternatifs sont reliées par la formule suivante :

$$f_n = n \times f_0, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

La fréquence de la composante continue est nulle.

Remarque

Ce théorème est valable pour tout les signaux périodiques et ce, qu'importe le motif.

C Composante continue et alternative d'un signal périodique

C.1 Composition d'un signal périodique

$$u(t) = \boxed{\langle u \rangle} + \boxed{A_1 \times \sin\left(2 \times \pi \times f_1 \times t + \varphi_1\right)} + \boxed{A_2 \times \sin\left(2 \times \pi \times f_2 \times t + \varphi_2\right)} + \boxed{A_3 \times \sin\left(2 \times \pi \times f_3 \times t + \varphi_3\right)} + \ldots$$

Composante continue

Composantes alternatives

C.2 La composante alternative, fondamentale et harmoniques

Définition

Une harmonique est une composante sinusoïdale d'un signal périodique.

Définition

L'harmonique de rang 1 est appelé le « fondamental » du signal car c'est le signal sinusoïdal alternatif qui impose sa fréquence f_0 au signal $u(t)$.

Propriété

L'harmonique de rang n a pour fréquence $f_n = n \times f_0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple

Soit la composante alternative d'un signal périodique alternatif, notée $u_{\text{alt}}(t)$, de fréquence f_0, superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples entiers de f_0, telle que :

$$u_{\text{alt}}(t) = A_1 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2) + A_3 \sin(2\pi f_3 t + \varphi_3) + \cdots$$

- Signal sinusoïdal alternatif de fréquence f_0, appelé harmonique de rang 1 ou fondamental du signal.
- Signal sinusoïdal alternatif de fréquence $f_2 = 2f_0$, appelé harmonique de rang 2.
- Signal sinusoïdal alternatif de fréquence $f_3 = 3f_0$, appelé harmonique de rang 3.

C.3 Déterminer le rang d'une harmonique

Méthode 1 : Trouver le rang d'une harmonique

- Identifier l'harmonique de rang 1.
- Diviser la fréquence de l'harmonique en question par celle du fondamental.
- Le résultat donne le rang de l'harmonique.

Exemple

Par exemple :

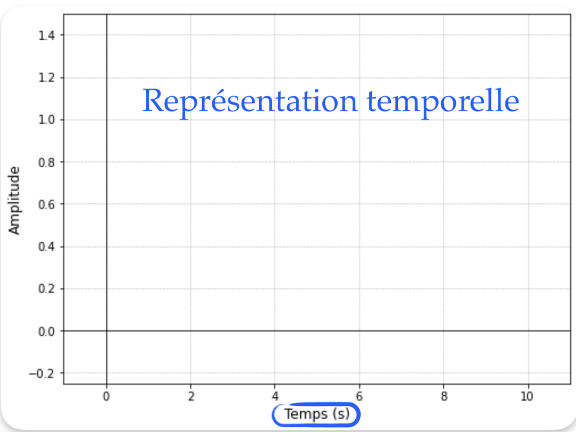
$$u(t) = 2\sin(2\pi \times 100 \times t) + 3\sin(2\pi \times 300 \times t)$$

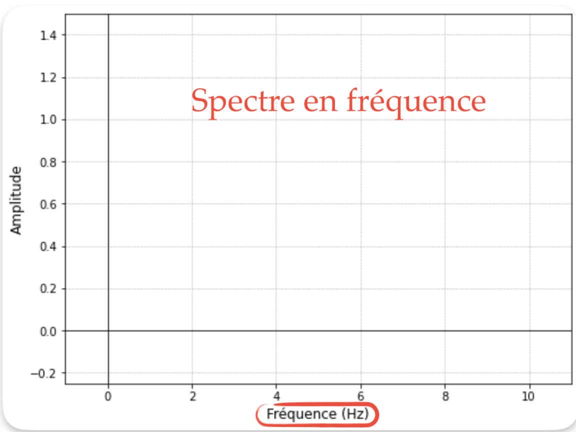
- $2\sin(2\pi \times 100 \times t)$ est l'expression numérique du fondamental (harmonique de rang 1), de fréquence $f_0 = 100\,\text{Hz}$.
- $3\sin(2\pi \times 300 \times t)$ est l'expression numérique de l'harmonique de rang 3 car $\frac{300\,\text{Hz}}{100\,\text{Hz}} = 3$.

Il se peut donc que l'amplitude A_2 de l'harmonique de rang 2 soit nulle.

D Spectre en fréquence

D.1 Les représentations





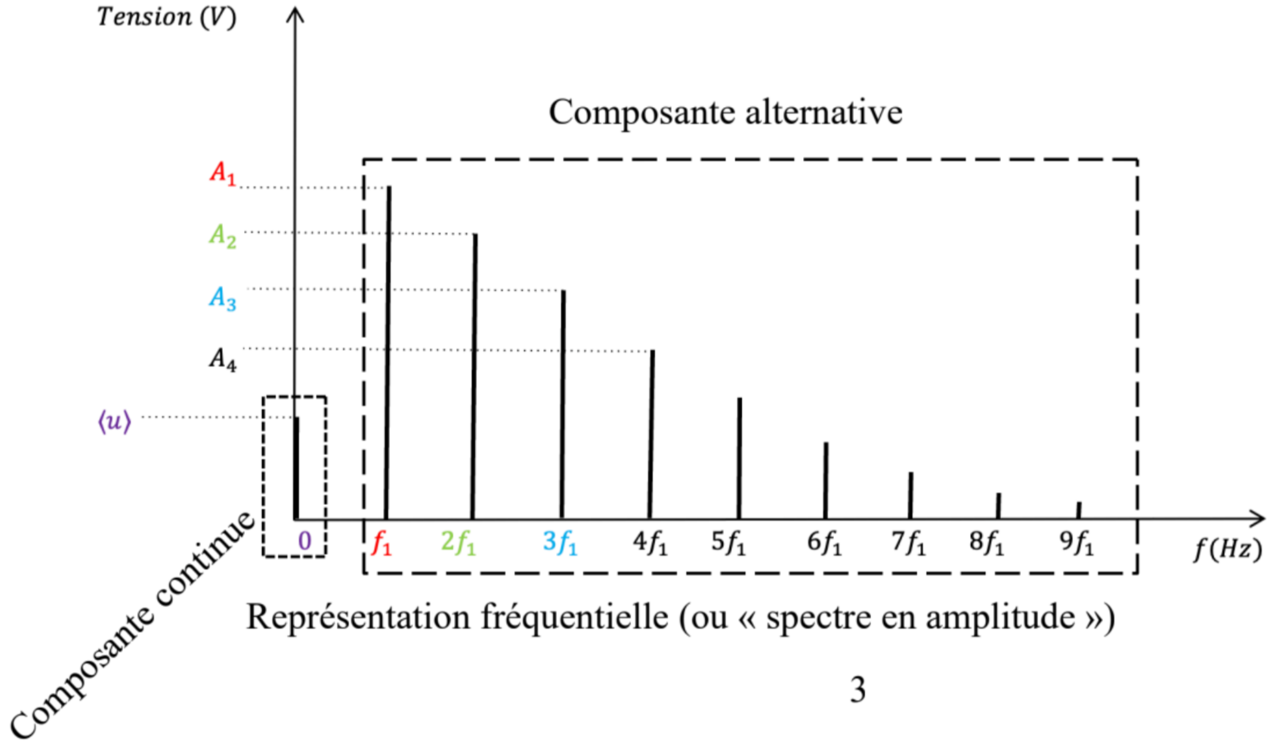


Figure 1 – Exemple de spectre fréquentiel, Univ. lyon

Définition

On peut caractériser un signal grâce à sa représentation fréquentielle, c'est-à-dire l'étude de l'amplitude de ses harmoniques en fonction de leur fréquence.

D.2 La valeur efficace à partir d'un spectre

Méthode 2 : Valeur efficace

Lorsque l'on connaît les amplitudes des harmoniques et la valeur moyenne du signal, la valeur efficace U_{eff} du signal $x(t)$ se détermine ainsi :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle x \rangle^2 + \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + \cdots} = \sqrt{\langle x \rangle^2 + \sum_n \frac{A_n^2}{2}}$$

où :

- A_n : amplitude de l'harmonique de rang n, en volt.
- $\langle x \rangle$: valeur moyenne du signal, en volt.

E Signal triangulaire

Propriété

Un signal $u(t)$ périodique, triangulaire, d'amplitude A, de fréquence f_0, a pour développement en série de Fourier :

$$x(t) = \langle x \rangle + \frac{8A}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\right)\cos(2\pi f_0 t) + \frac{8A}{\pi^2}\left(\frac{1}{3^2}\right)\cos(2\pi \times 3f_0 t) + \frac{8A}{\pi^2}\left(\frac{1}{5^2}\right)\cos(2\pi \times 5f_0 t) + \cdots$$

ou encore

$$x(t) = \langle x \rangle + \frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos(2\pi(2n+1)f_0 t)$$

où $n \in \mathbb{N}$.

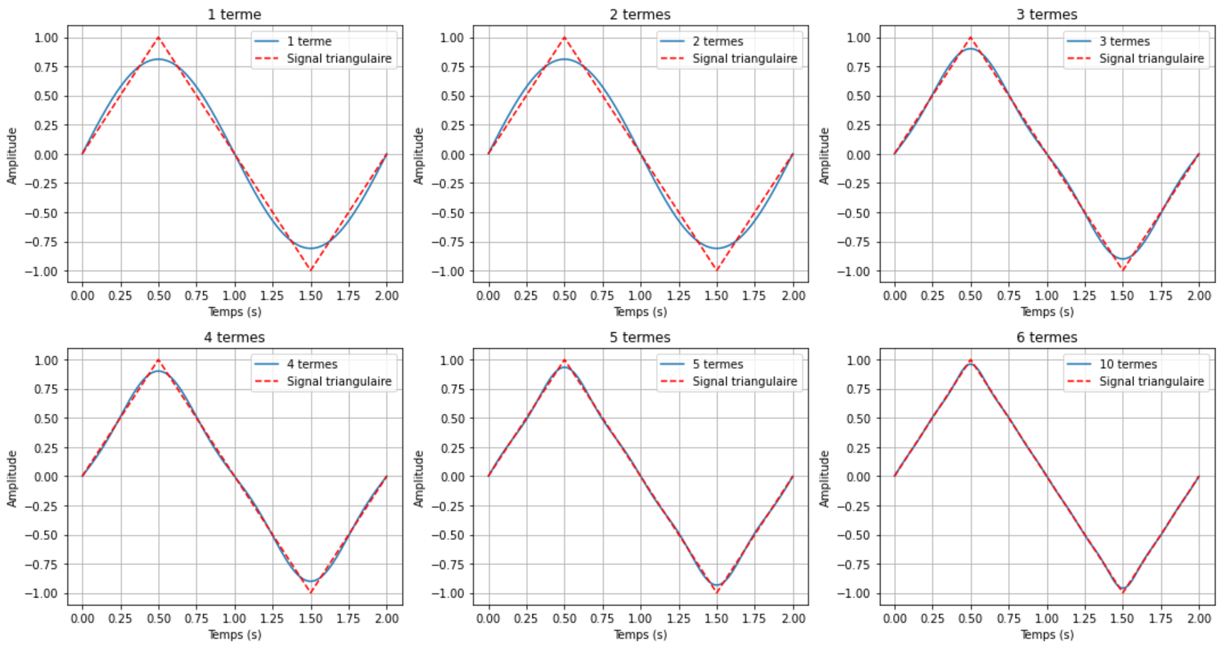


Figure 2 – Évolution de l'allure de la courbe en fonction du nombre de termes présents dans la série de Fourier.

F Signal carré

Propriété

Un signal $u(t)$ périodique, carré, d'amplitude A, de fréquence f_0, a pour développement en série de Fourier :

$$x(t) = \langle x \rangle + \frac{4A}{\pi}\frac{1}{1}\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4A}{\pi}\frac{1}{3}\cos\left(2\pi \times 3f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4A}{\pi}\frac{1}{5}\cos\left(2\pi \times 5f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \cdots$$

ou encore

$$x(t) = \langle x \rangle + \frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos\left(2\pi(2n+1)f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

où $n \in \mathbb{N}$.

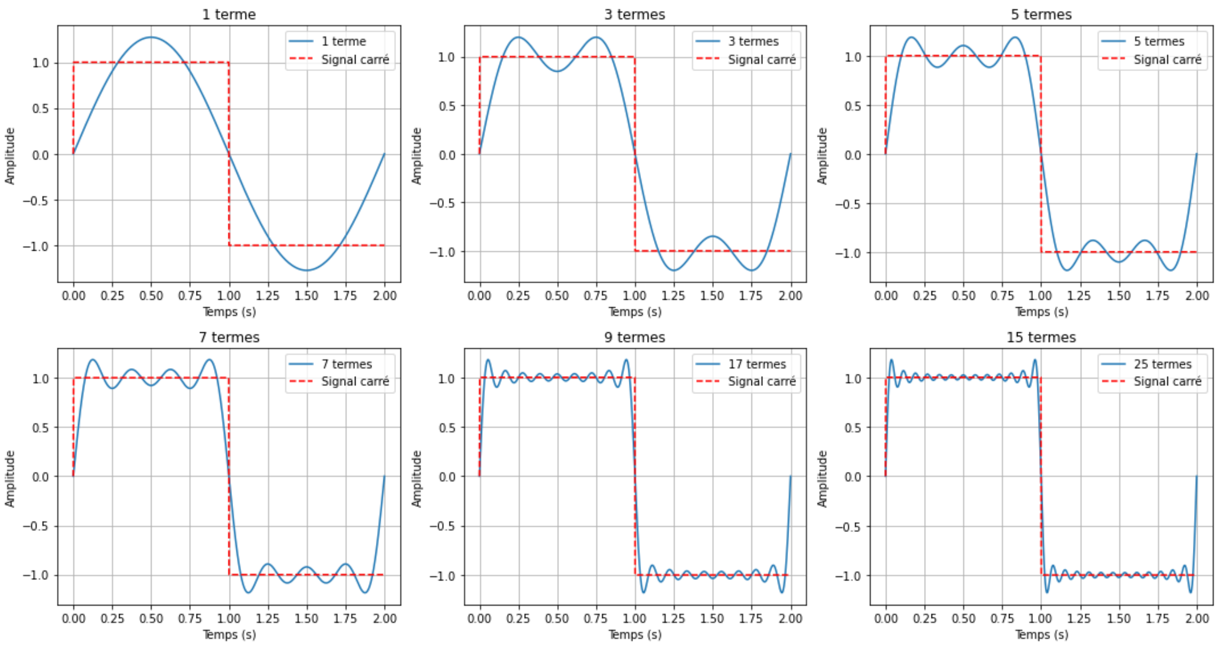


Figure 3 – Évolution de l'allure de la courbe en fonction du nombre de termes présents dans la série de Fourier.

> **Remarque**
>
> Pour les deux signaux pris en exemple, l'amplitude des harmoniques décroit quand leur rang augmente.

G Encombrement spectral et encombrement spectral à X%

Définition

L'encombrement spectral d'un signal correspond à la valeur de l'étendue en fréquence qu'occupe l'ensemble des raies du signal.Il est noté Δf, et son unité est le Hertz (Hz). Il est défini par :

$$\Delta f = f_{\mathrm{max}} - f_{\mathrm{min}}$$

où :

- f_{max} est la fréquence de l'harmonique de plus haut rang du signal (ou de la raie de plus grande fréquence), ayant une amplitude non nulle, en Hertz.
- f_{min} est la fréquence de la raie de plus basse fréquence, ayant une amplitude non nulle, en Hertz.

On peut également définir un encombrement spectral à $X\%$:

Définition

Pour un signal périodique d'amplitude A, l'encombrement spectral à $X\%$ du signal correspond à la valeur de l'étendue en fréquence suivante :

$$\Delta f_{X\%} = f_{\mathrm{max},X\%} - f_{\mathrm{min}}$$

où :

- $f_{\mathrm{max},X\%}$ est la fréquence (en Hertz) de l'harmonique du signal (ou de la raie) ayant une amplitude juste supérieure à la valeur $\frac{X}{100} \times A$.
- f_{min} est la fréquence de la raie de plus basse fréquence, ayant une amplitude non nulle, en Hertz.

II Cas des signaux apériodiques

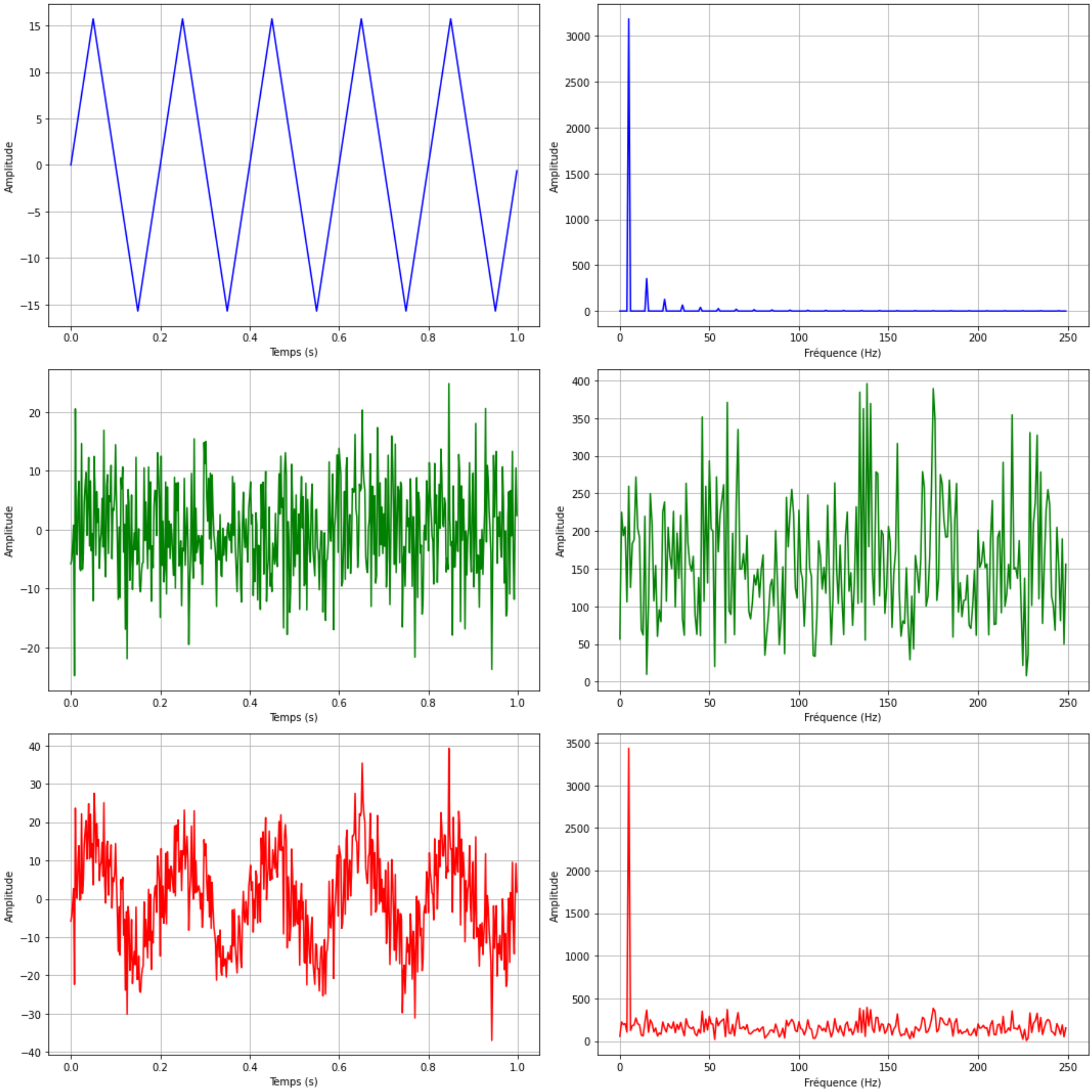


Figure 4 – Différents signaux

Propriété

Le spectre d'un signal périodique est constitué de raies discrètes.
Le spectre d'un signal non périodique est continu.
Un signal non périodique ne possède donc ni fondamental, ni harmonique de fréquence multiples entiers de celle du fondamental.