

Numérisation d'une tension

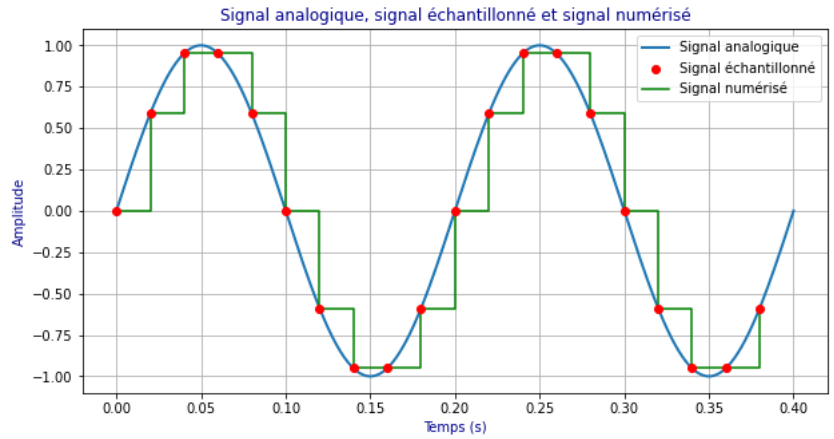
Plan du cours		Exercices
I	Introduction à la numérisation des signaux Définition et intérêt de la numérisation • Les étapes de la numérisation	2 Voir fiche TD
II	L'échantillonnage d'un signal Théorème de Shannon-Nyquist A.1 Énoncé du théorème 3 A.2 Condition sur la fréquence d'échantillonnage 3 Exemples B.1 Echantillonnage 4 B.2 Résultat obtenu 4 Profondeur de mémoire d'un numériseur • Conséquences d'un échantillonnage incorrect D.1 Repliement de spectre 6 Rôle et utilité du filtre anti-repliement E.1 Pourquoi filtrer avant l'échantillonnage? 6 E.2 Choix de la fréquence de coupure du filtre 7 Spectre d'un signal échantillonné F.1 Echantillonnage d'un signal périodique 7 F.2 Condition de réversibilité de l'échantillonnage 8	Voir Activité et Application
Tous les cours en ligne !		
<div style="text-align: center;"> <p>PhysicSensei.fr</p> </div>		
III	La fonction blocage	8
IV	Le système "CAN" Convertisseur Analogique Numérique Caractéristiques d'un CAN A.1 La résolution 9 A.2 Durée de numérisation 9 A.3 La tension pleine échelle 10 A.4 Critère permettant d'éviter la saturation du CAN 10 A.5 Pas de quantification 10 Codage des échantillons en binaire B.1 Exemple sur un codage en 3 bits 11 B.2 Déterminer rapidement le nombre binaire en sortie d'un CAN 12	9
V	Le système "CNA" Convertisseur Numérique Analogie Caractéristiques d'un CNA A.1 Pas de quantification 13 Règles de quantification B.1 Quantification par valeur inférieure 13 B.2 Quantification par valeur centrale 13 B.3 Comment trouver la valeur quantifiée assimilée à un mot binaire 14	12

I Introduction à la numérisation des signaux

A Définition et intérêt de la numérisation

☰ Définition

La numérisation consiste à convertir un signal analogique en une suite de valeurs discrètes afin de le manipuler, le stocker ou le transmettre numériquement.



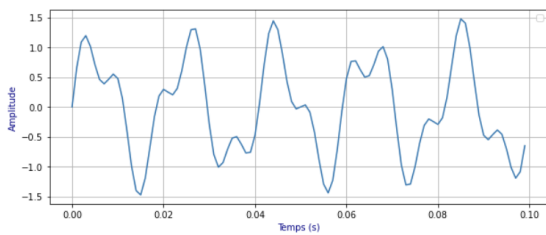
💡 Remarque

Les avantages de la numérisation sont multiples :

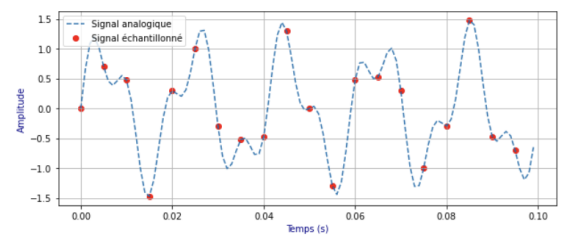
- Réduction du bruit et amélioration de la robustesse du signal.
- Facilité de stockage et de transmission.
- Possibilité de traitement numérique avancé.

B Les étapes de la numérisation

La numérisation repose sur trois étapes principales : l'échantillonnage, la quantification et le codage.



➔
Signal analogique

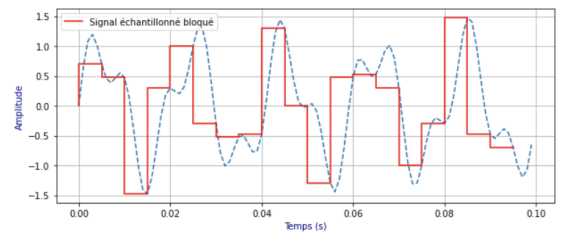


⬇
Signal échantillonné

Signal codé

```
1001001010100
1011010100101
1001001010110
1000110100101
1011010100101
1001001010110
1000110100101
```

⬅
Signal échantillonné bloqué



II L'échantillonnage d'un signal

☰ Définition

L'échantillonnage consiste à prélever des valeurs du signal analogique à intervalles de temps réguliers. La fréquence d'échantillonnage doit être choisie judicieusement pour éviter la perte d'information.

A Théorème de Shannon-Nyquist

A.1 Énoncé du théorème

✖¹ Formule

Le théorème de Shannon-Nyquist stipule que :

où $f_{\text{échantillonnage}}$ est la fréquence à laquelle le signal est échantillonné et f_{max} est la fréquence maximale contenue dans le signal analogique.

A.2 Condition sur la fréquence d'échantillonnage

🧪 Propriété

- Si un signal a une fréquence maximale f_{max} , la fréquence d'échantillonnage doit être au moins $2f_{\text{max}}$ pour éviter les pertes d'information.
- Si l'échantillonnage est effectué à une fréquence plus faible, des phénomènes tels que le repliement du spectre peuvent se produire, ce qui entraîne une distorsion du signal lors de la reconstruction.

Exercice 1 Critère de Shannon



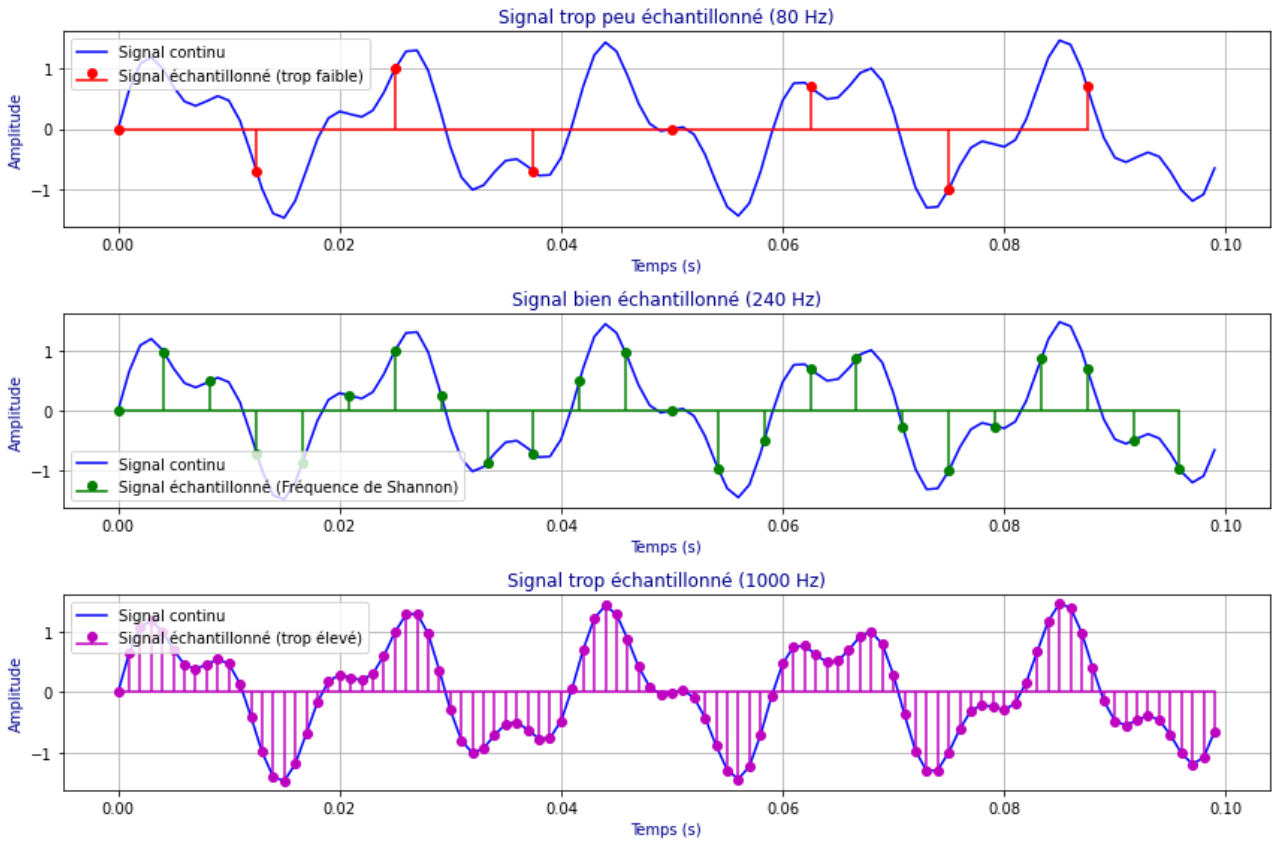
Un signal téléphonique a son spectre limité à $3,4\text{kHz}$ pour réduire son encombrement spectral. Il est échantillonné à $f_e = 8,0\text{kHz}$. Pour la réalisation d'un CD audio, on souhaite conserver la fréquence maximale du domaine audible qui est de $20,0\text{kHz}$. Le signal audio est échantillonné à $f_e = 44,1\text{kHz}$.

Q1 Lorsque la condition de Shannon est respectée, combien d'échantillons sont prélevés au minimum par période d'un signal $s(t)$ sinusoïdal ?

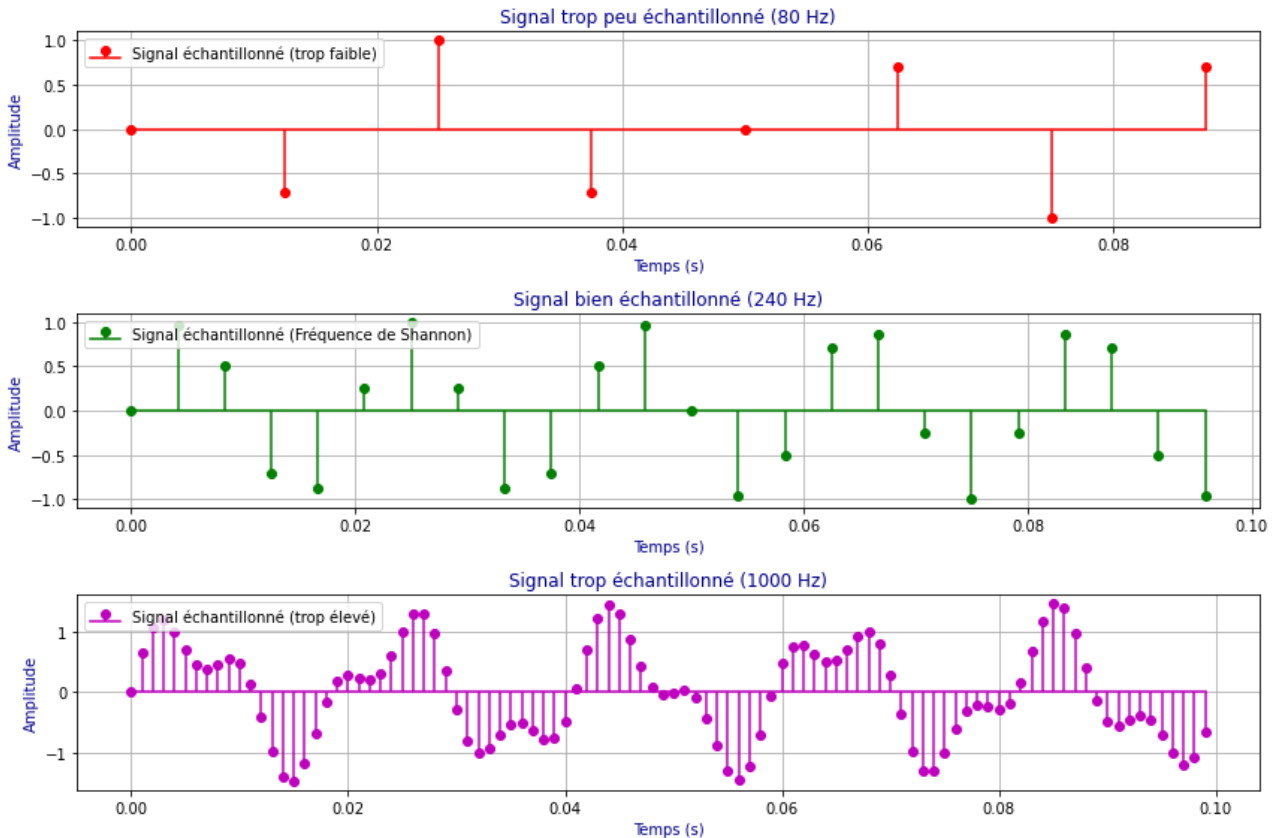
Q2 Le critère de Shannon est-il respecté pour la téléphonie et pour le CD audio ?

B Exemples

B.1 Echantillonnage



B.2 Résultat obtenu



C Profondeur de mémoire d'un numériseur

X¹ Formule

Chaque système numériseur (intégrant un système échantillonneur) possède une grandeur caractéristique nommée « profondeur de mémoire » : elle correspond au nombre total d'échantillons que peut contenir sa mémoire tampon. Elle est notée $N_{\text{mémoire}}$.

$$N_{\text{mémoire}} = \frac{\Delta T}{T_e}$$

ou encore :

$$N_{\text{mémoire}} = \Delta T \times f_e$$

où :

- ΔT : durée totale d'acquisition du numériseur (en secondes)
- T_e : période d'échantillonnage, dont l'unité est la seconde
- f_e : fréquence d'échantillonnage, en Hertz ($f_e = \frac{1}{T_e}$)

Exercice 2 Oscilloscope numérique & profondeur de mémoire



Un oscilloscope numérique est utilisé pour enregistrer un signal pendant une durée totale de 50 ms. Il possède une mémoire capable de stocker 500000 échantillons.

Q1 Déterminer la période d'échantillonnage T_e .

Q2 En déduire la fréquence d'échantillonnage F_e .

Q3 Sachant que la fréquence maximale du signal observé est 4kHz, vérifier si la condition de Shannon est respectée.

Q4 Si l'on souhaite observer un signal de fréquence maximale de 20kHz, quelle devrait être la nouvelle fréquence d'échantillonnage F_e pour respecter le critère de Shannon ?

Q5 La mémoire de l'oscilloscope est-elle suffisante pour enregistrer un signal de 50 ms dans ces nouvelles conditions ?

Données

- Profondeur de mémoire : $N_{\text{max}} = 500000$
- Durée d'acquisition : $\Delta t = 50$ ms
- Fréquence maximale du signal : $F_{\text{max}} = 4$ kHz
- Critère de Shannon : $F_e \geq 2F_{\text{max}}$

D Conséquences d'un échantillonnage incorrect

D.1 Repliement de spectre

✓ Exemple

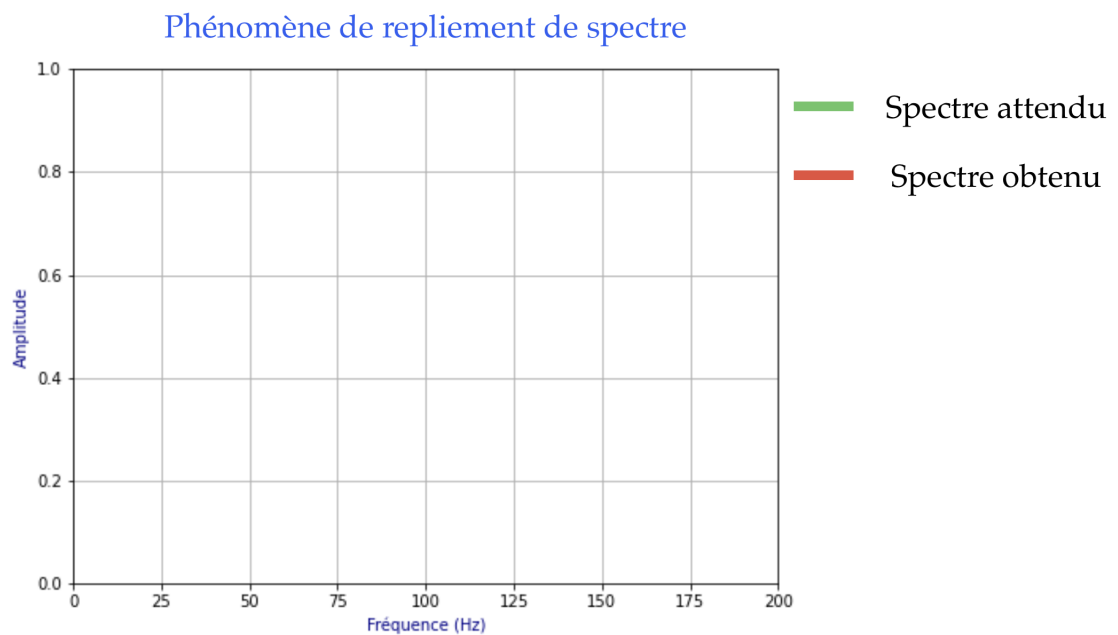
Supposons que nous ayons un signal qui contient deux sinusoides de fréquences différentes :

$$f_1 = 100 \text{ Hz}, \quad f_2 = 150 \text{ Hz}.$$

Le signal est échantillonné à une fréquence d'échantillonnage $f_s = 180 \text{ Hz}$.

Q6 La fréquence d'échantillonnage respecte-t-elle bien le critère de Shannon ?

Q7 Quelle est la fréquence du spectre replié ?



E Rôle et utilité du filtre anti-repliement

E.1 Pourquoi filtrer avant l'échantillonnage ?

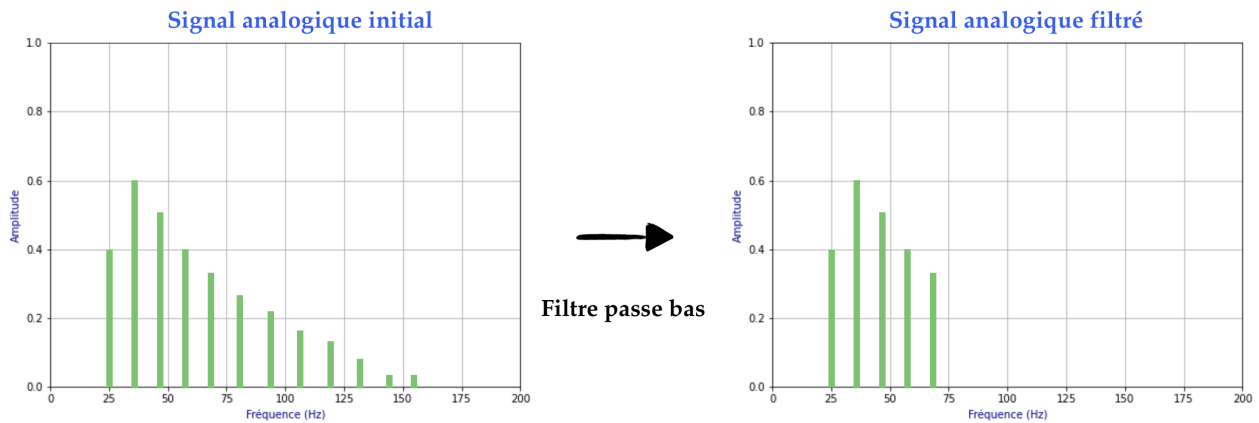
🕒 Rappel

Afin d'avoir une numérisation correcte qui respecte les conditions de Shannon, il est nécessaire d'avoir une fréquence d'échantillonnage au moins deux fois supérieure à la fréquence la plus élevée du signal analogique.

Deux options deviennent alors possible pour avoir une numérisation correcte :

- Augmenter la fréquence d'échantillonnage. Ce qui peut demander des systèmes d'échantillonneurs plus performants et coûteux.

- Enlever les hautes fréquences du signal analogique, et donc permettre aux échantillonneurs moins performant de numériser en respectant le critère de Shannon.



E.2 Choix de la fréquence de coupure du filtre

Propriété

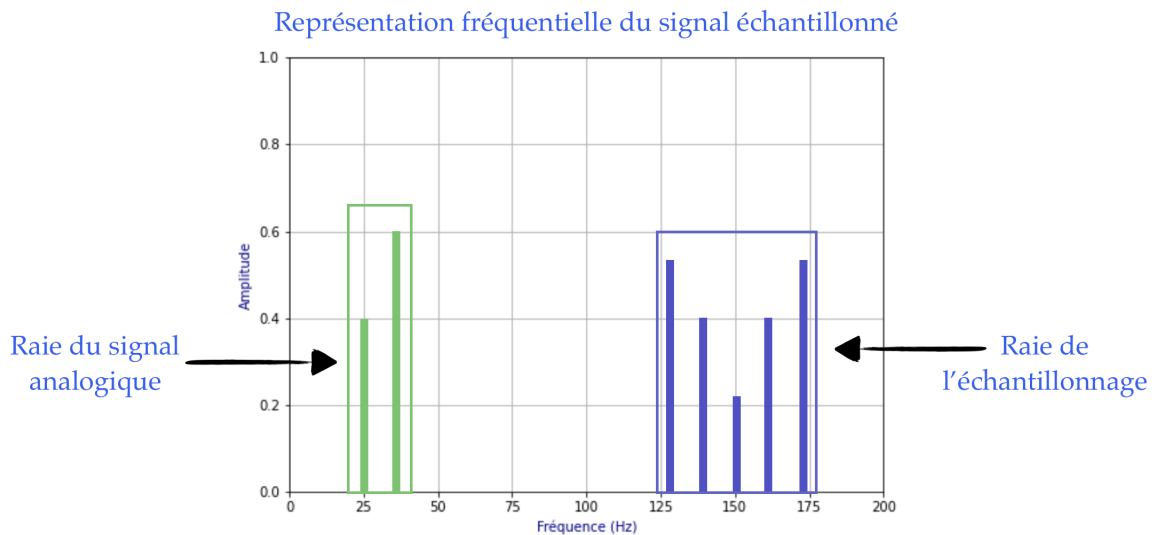
La fréquence de coupure du filtre doit être fixée à la fréquence de Nyquist, c'est-à-dire à la moitié de la fréquence d'échantillonnage, pour éviter l'aliasing et préserver la qualité du signal numérisé.

F Spectre d'un signal échantillonné

F.1 Echantillonnage d'un signal périodique

Propriété

Ci-dessous, la représentation fréquentielle d'un signal échantillonné :



X¹ Formule

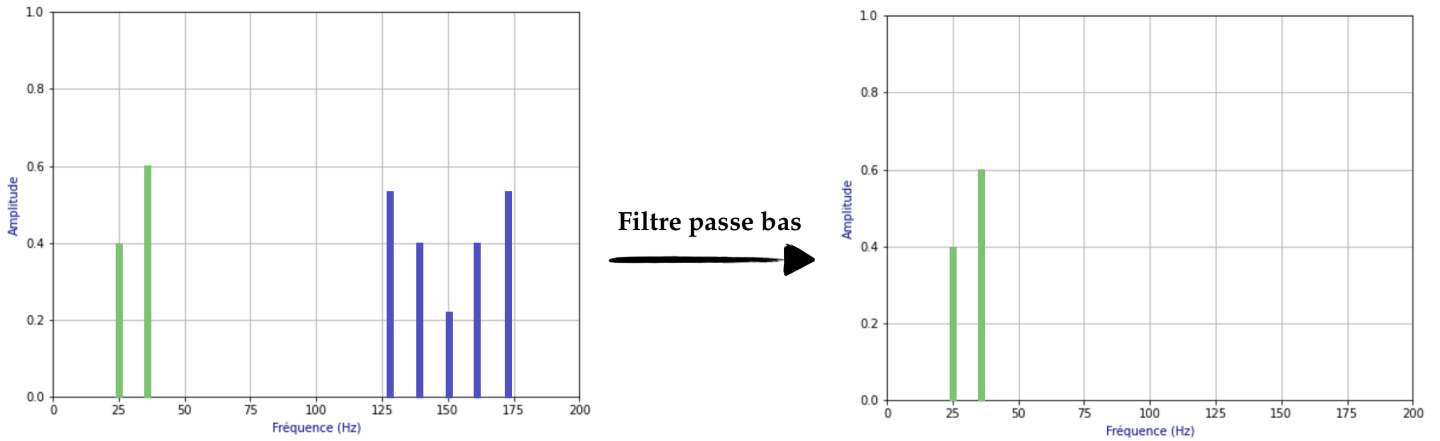
Pour un signal périodique, chaque harmonique de fréquence f_n et d'amplitude A_n , sous l'effet de l'échantillonnage, engendre une infinité de raies de même amplitude, dont les abscisses sont :

$$k \times f_e \pm f_n$$

F.2 Condition de réversibilité de l'échantillonnage

Définition

Un échantillonnage est réalisé correctement s'il est réversible. Pour restituer le signal analogique périodique d'origine à partir du signal échantillonné correctement, on utilise un système passe-bas dont la fréquence de coupure f_c est comprise entre f_{max} et $f_e - f_{max}$



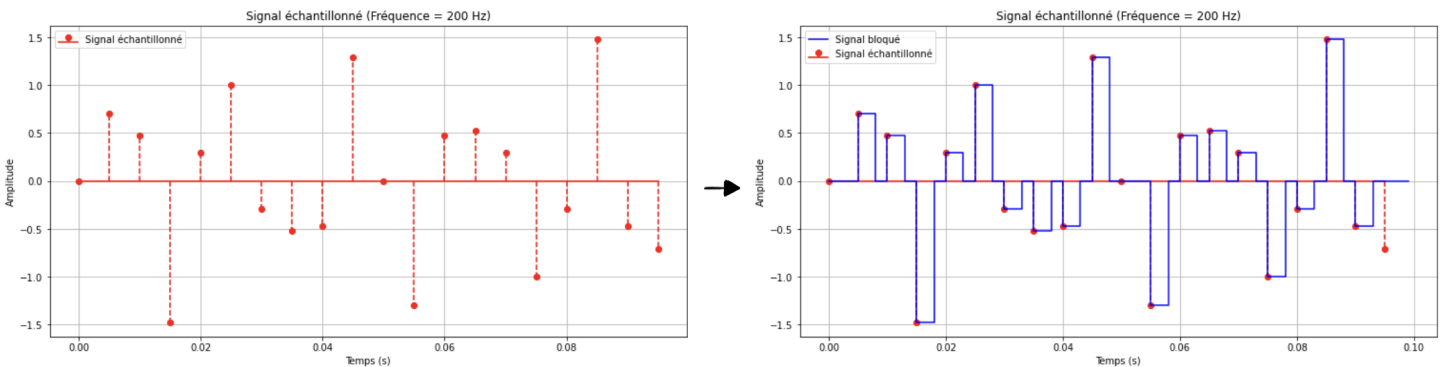
III La fonction blocage

Remarque

Une fois échantillonné, le signal doit-être codé par le convertisseur analogique-numérique. Cette opération n'est en pratique réalisable que si le signal échantillonné est maintenu constant jusqu'au prochain échantillon.

Définition

Le rôle du bloqueur est de maintenir le dernier échantillon à une valeur constante. Cela permet à l'étage inférieur de quantification de disposer de plus de temps pour le codage de l'information.

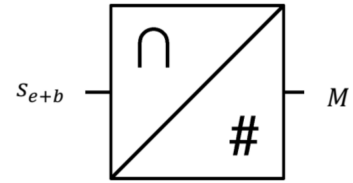


IV Le système "CAN" Convertisseur Analogique Numérique

Définition

La représentation symbolique d'un convertisseur analogique-numérique (CAN) est donnée ci-contre :

Le signal échantillonné et bloqué est envoyé en entrée. Le CAN réalise la quantification du signal et fournit en sortie son codage en binaire. On obtient donc un nombre binaire M en sortie.



A Caractéristiques d'un CAN

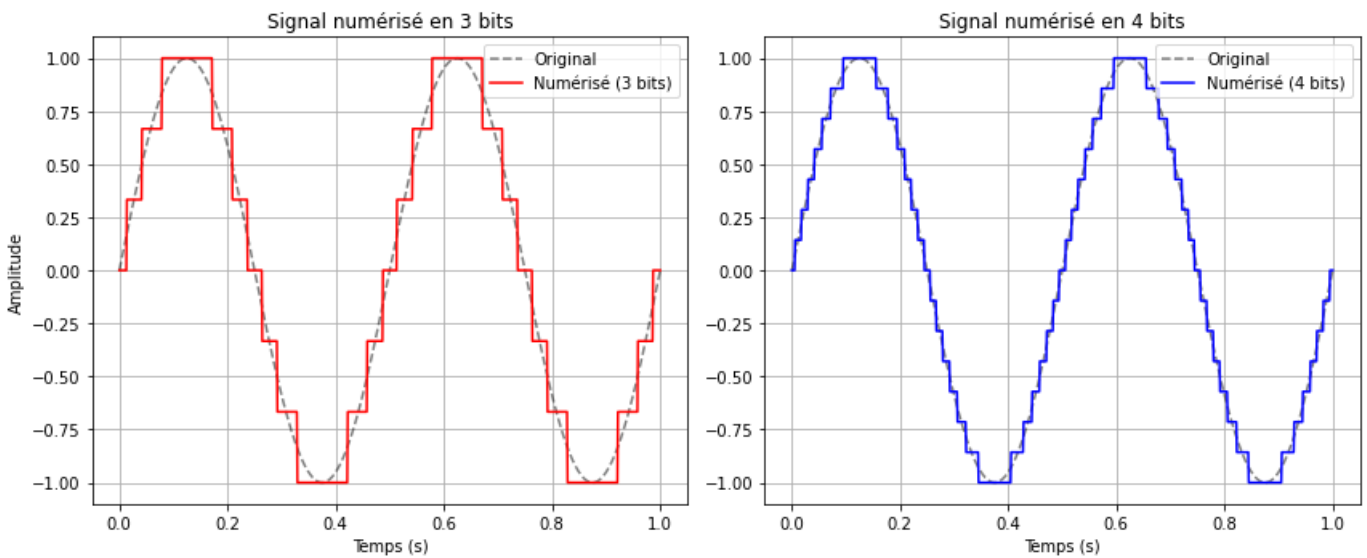
A.1 La résolution

Propriété

On appelle n , la résolution du CAN, qui correspond au nombre de *bits* du nombre binaire M , en sortie du CAN.

Son unité est donc le *bit* avec n un nombre entier naturel.

La qualité de la numérisation dépend directement de la résolution du CAN.



Remarque

Pour le signal numérisé en 3 bits, on découpe le signal en 2^3 parties égales, pour le signal numérisé en 4 bits on le découpe en 2^4 parties etc...

A.2 Durée de numérisation

Attention !

L'encodage du nombre binaire prend un certain temps noté T_{CAN} . Afin d'éviter de perdre des échantillons, il est nécessaire que :

$$T_{CAN} < T_e$$

A.3 La tension pleine échelle

Définition

La tension pleine échelle, notée ΔU , représente la valeur crête à crête (en entrée) que le CAN est capable de convertir. Son unité est le volt.

$$\Delta U = U_{\text{CAN,max}} - U_{\text{CAN,min}}$$

où :

- $U_{\text{CAN,min}}$: valeur minimale (en volt) que le CAN est capable de détecter.
- $U_{\text{CAN,max}}$: valeur maximale (en volt) que le CAN est capable de détecter.

A.4 Critère permettant d'éviter la saturation du CAN

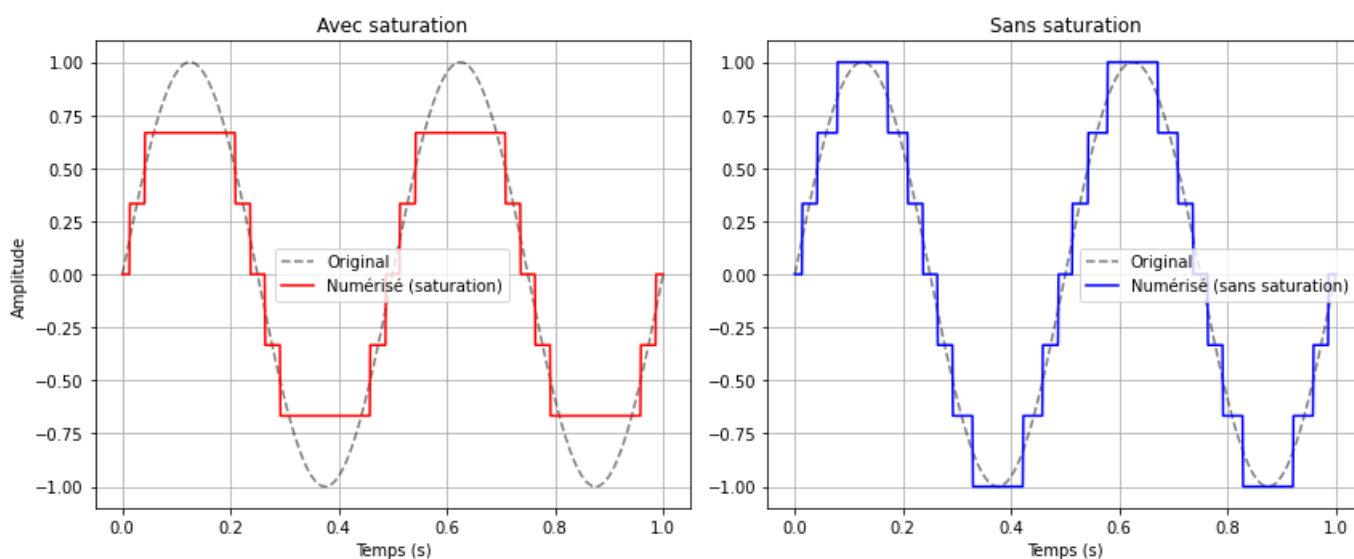
Attention !

Afin de pouvoir convertir correctement l'intégralité du signal et d'éviter la saturation du CAN, il faut que :

$$\Delta U \geq V_{\text{pp}}$$

où :

- ΔU : tension pleine échelle du CAN, en volt.
- V_{pp} : valeur crête à crête du signal, en volt.



A.5 Pas de quantification

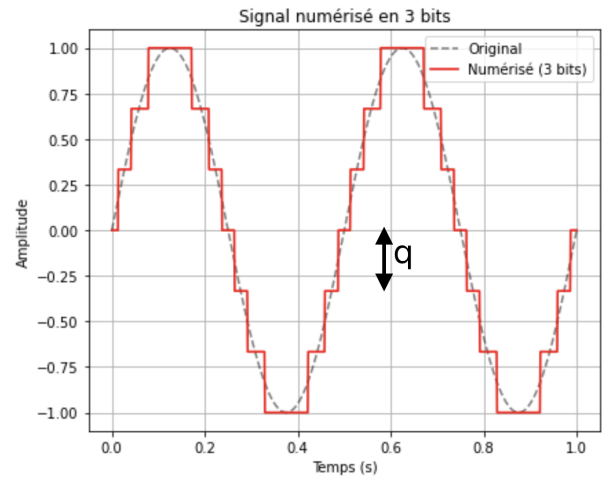
X¹ Formule

La différence de tension entre deux niveaux successifs de tension quantifiée est appelée le pas de quantification du CAN (ou quantum), noté q , et son unité est le volt :

$$q = \frac{\Delta U}{2^n}$$

où :

- q : pas de quantification (ou quantum), en volt.
- ΔU : tension pleine échelle du convertisseur, en volt.
- n : résolution du CAN, en bits.



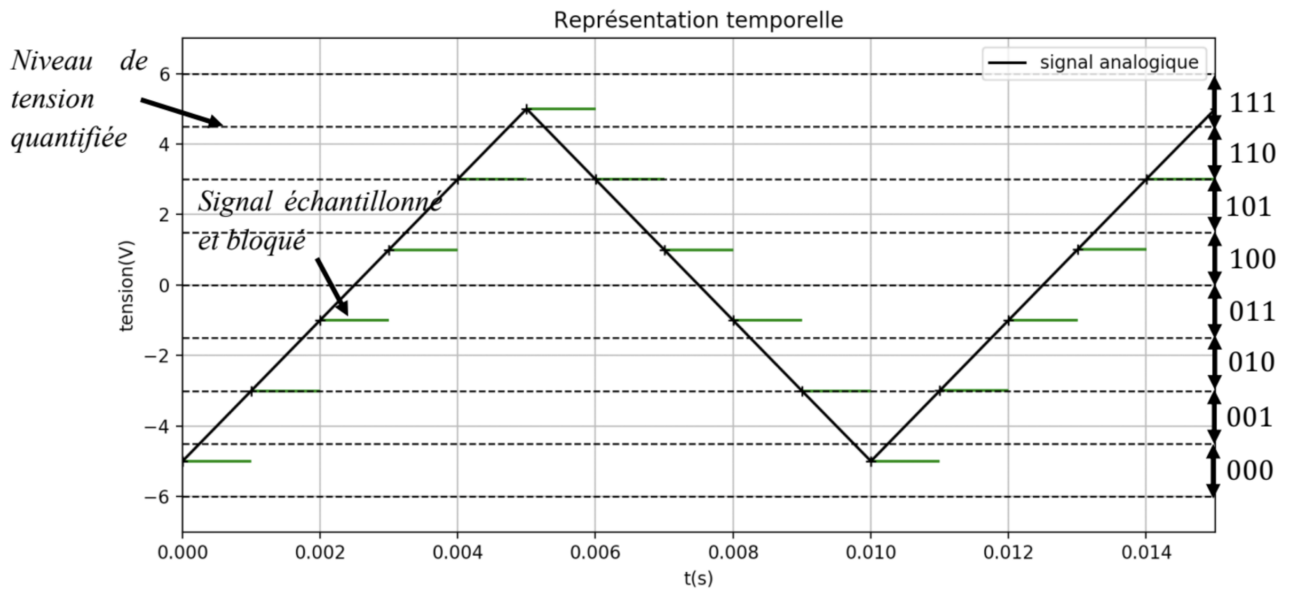
B Codage des échantillons en binaire

B.1 Exemple sur un codage en 3 bits

Définition

On associe à chaque intervalle entre deux niveaux de tension quantifiée, un nombre binaire composé de n bits.
Le plus petit nombre binaire est associé à l'intervalle dont les niveaux de tension ont les valeurs les plus faibles.

Exemple



Attention !

Tous les échantillons d'un même intervalle (entre deux niveaux de tension quantifiée) se voient donc attribuer le même nombre binaire. Cette opération est donc non réversible : la perte d'information qui découle de la quantification du signal n'est pas « récupérable » (contrairement à l'échantillonnage s'il est effectué correctement).

B.2 Déterminer rapidement le nombre binaire en sortie d'un CAN

X¹ Formule

Le nombre décimal M est l'entier inférieur en sortie d'un CAN peut se déterminer ainsi :

$$M = \frac{V_s - U_{\text{CAN,min}}}{q}$$

où :

- V_s : valeur du signal échantillonné (V).
- $U_{\text{CAN,min}}$: valeur minimale que le CAN est capable de coder (V).
- q : pas de quantification (V).

Si on cherche le nombre binaire en sortie, il suffit d'effectuer la conversion décimal-binaire pour N_{CAN} .

Rappel

La conversion d'un nombre entier en binaire se fait ainsi :

- On applique la méthode de division successive par 2.
- On garde le reste de chaque division euclidienne.
- On remonte de gauche à droite.

Application

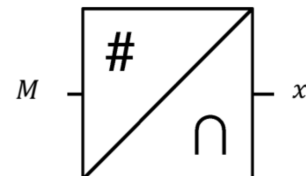
Convertir ces nombres en mot binaire :

- o 13
- o 364
- o 153
- o 236
- o 112

V Le système "CNA" Convertisseur Numérique Analogie**Définition**

La représentation symbolique d'un convertisseur analogique-numérique (CAN) est donnée ci-contre :

Dans la chaîne de traitement de l'information, le convertisseur numérique-analogique (CNA) reçoit les données numériques sous forme d'un nombre binaire, noté M , de n bits et leur fait correspondre une valeur de tension en sortie.

**Attention !**

Afin de restituer le signal analogique le plus fidèlement, le CNA possède la même tension pleine échelle et la même résolution q que le CAN (en début de chaîne).

A Caractéristiques d'un CNA

A.1 Pas de quantification

Formule

La différence de tension entre deux niveaux successifs de tension quantifiée est appelée le pas de quantification du CAN (ou quantum), noté q , et son unité est le volt :

$$q = \frac{\Delta U}{2^n - 1}$$

où :

- q : pas de quantification (ou quantum), en volt.
- ΔU : tension pleine échelle du convertisseur, en volt.
- n : résolution du CAN, en bits.

B Règles de quantification

Le système CNA associe à chaque nombre binaire en entrée une tension en sortie approchée et discrète.

B.1 Quantification par valeur inférieure

Propriété

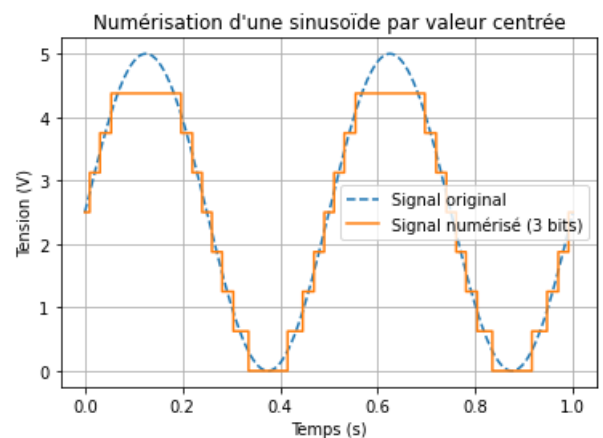
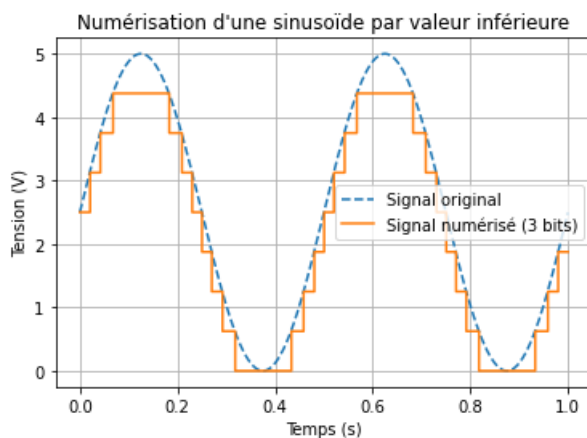
Un CNA peut procéder par valeur inférieure : chaque nombre binaire codé sur n bits se voit attribuer la valeur de la tension quantifiée, juste inférieure.

B.2 Quantification par valeur centrale

Propriété

Un CNA peut procéder par valeur centrale : chaque nombre binaire codé sur n bits se voit attribuer la valeur centrale (moyenne) des deux niveaux quantifiés l'encadrant.

Exemple



B.3 Comment trouver la valeur quantifiée assimilée à un mot binaire

X¹ Formule

La valeur quantifiée S_q attribuée à un nombre binaire N_{CNA} (entrant dans le CNA) peut se déterminer ainsi :

- Pour un CNA par valeur inférieure :

$$S_q = U_{\text{CAN,min}} + M \times q$$

- Pour un CNA par valeur centrale :

$$S_q = U_{\text{CAN,min}} + M \times q + \frac{q}{2}$$

où :

- S_q : valeur quantifiée du signal (V)
- S_{min} : valeur minimale que le CNA est capable de fournir (V)
- q : pas de quantification du CNA (V)
- M : nombre décimal en sortie du CNA