Mesures et Incertitudes

Plan du cours

Exercices

Voir Activité et Application

Tous les cours en ligne !

PhysicSensei.fr

I Variabilité et Incertitudes

A Variabilité de la mesure

A.1 Le mesurage et autres définitions

Définition

En Physique et en électronique, on appelle « mesurage » un processus expérimental qui conduit à attribuer un ensemble de valeurs numériques à une grandeur notée x, accompagné d'une unité appropriée.

Propriété

Un mesurage est un processus généralement complexe qui implique de nombreux sous-processus. Cette complexité entraîne inévitablement une variabilité des mesures, ce qui signifie que répéter la mesure produit souvent des valeurs légèrement différentes. Cette variabilité est naturelle et inhérente au processus de mesure. Il ne faut pas chercher à l'éliminer ; au contraire, elle contient souvent des informations précieuses sur le processus physique en question.

A.2 Source de variabilité

Remarque

La variabilité des mesures peut provenir de plusieurs aspects :

- Méthode de mesure : utiliser un double décimètre ou un mètre ruban pour mesurer une longueur donne des valeurs différentes.
- Instruments de mesure : deux voltmètres identiques peuvent donner des valeurs de tension légèrement différentes.
- Environnement : la température des systèmes électriques augmente au cours de leur utilisation, ce qui peut affecter la mesure.
- Expérimentateur : les gestes, choix et techniques de la personne mesurant introduisent une variabilité. Deux personnes peuvent obtenir des valeurs différentes pour la même mesure.

A.3 Valeur expérimentale

Définition

La valeur appelée « valeur expérimentale » est la valeur que l'on attribue à la grandeur, après mesurage unique ou mesurage multiple (ou par calcul).
Dans ce chapitre, elle est notée x_{exp} .

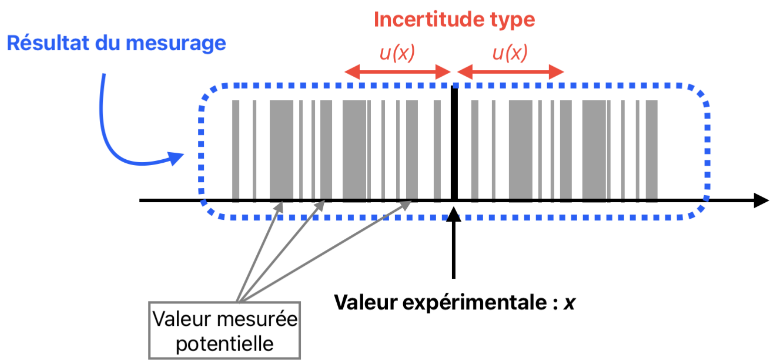
B Incertitude-type et Incertitude relative

B.1 L'incertitude-type

Définition

L'incertitude-type quantifie la variabilité des valeurs mesurées. Pour une grandeur X, on attribue une incertitude-type $u(X)$.

La figure ci-contre représente une distribution de valeurs potentiellement mesurées ainsi que l'incertitude-type. On constate qu'en moyenne deux valeurs (mesurées potentielles) prises au hasard sont séparées de quelques $u(x)$.



Propriété

L'incertitude-type résulte d'une évaluation : on n'est jamais certain de sa valeur. Pour rappeler que l'incertitude-type est elle-même incertaine, on limite en général son nombre de chiffres significatifs à deux.

B.2 Ecrire le résultat d'un mesurage

Méthode 1 : Ecriture conventionnelle

On écrit un résultat de mesurage en suivant la méthode suivante :

— On utilise deux chiffres significatifs au maximum pour $u(x)$, en arrondissant par excès.

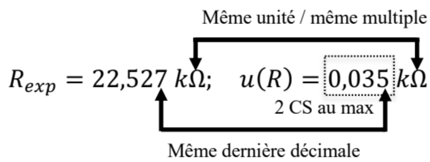
— Puis, on rédige la valeur expérimentale, sous la forme $x_{\text{exp}} = \dots$ en précisant l'unité appropriée et l'incertitude-type associée à la valeur mesurée, sous la forme $u(x) = \dots$, en utilisant la même puissance de 10 que celle de la valeur mesurée, et évidemment la même unité.

$$x_{\text{exp}} = \dots; \quad u(x) = \dots$$

— Enfin, on adapte le nombre de chiffres significatifs de x_{exp} pour que la valeur ait le même nombre de décimales que $u(x)$.

Exemple

Un mesurage de la valeur d'une résistance avec évaluation de l'incertitude-type peut s'écrire ainsi :



C Estimation de la valeur expérimentale et de l'incertitude type associée

II Les deux types d'incertitude-type

Premier cas

L'expérimentateur observe la variabilité de la mesure lors du processus expérimental.
Le mesurage aboutit à une série de N mesures indépendantes : l'évaluation des incertitudes-type se fait par des méthodes statistiques. On dit que l'incertitude-type est de type A.

Deuxième cas

L'expérimentateur n'observe pas la variabilité de la mesure lors du processus expérimental.
Le mesurage aboutit à une mesure unique réalisée avec un instrument de mesure : l'évaluation des incertitudes-type se fait par une approche probabiliste. On dit que l'incertitude-type est de type B.

Plusieurs valeurs mesurées ⟺ évaluation de type A
Une unique valeur mesurée ⟺ évaluation de type B

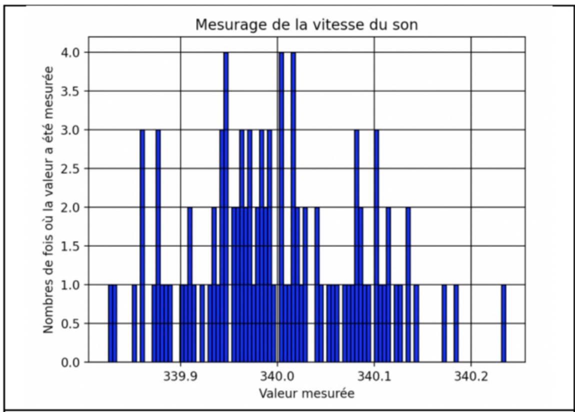
A Mesurage avec variabilité observée – type A (Approche statistique)

A.1 Développement

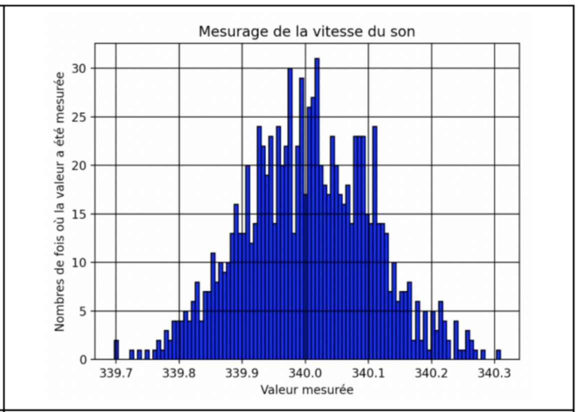
Lorsque la variabilité des mesures est accessible à l'expérimentateur, il convient de répéter un grand nombre de fois le mesurage.

Exemple

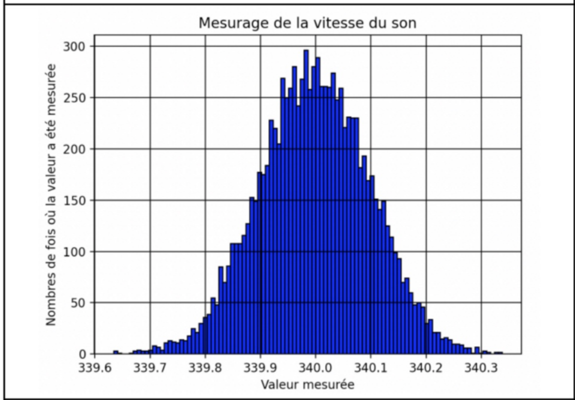
Résultats (par simulation (Univ. Lyon)) de N mesures pour le mesurage de la vitesse de propagation du son dans l'air :



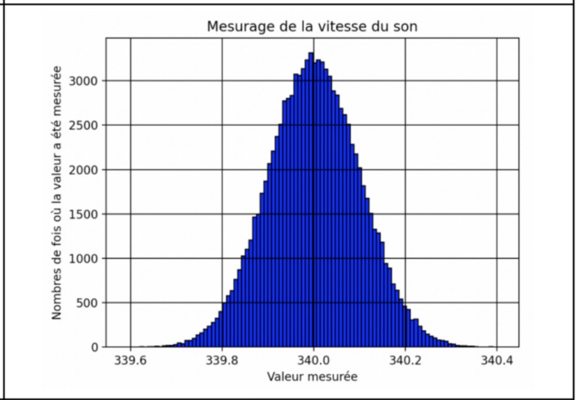
$N = 100$



$N = 1000$

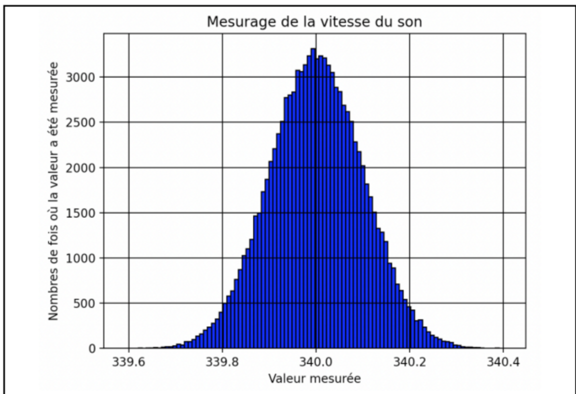


$N = 10\,000$

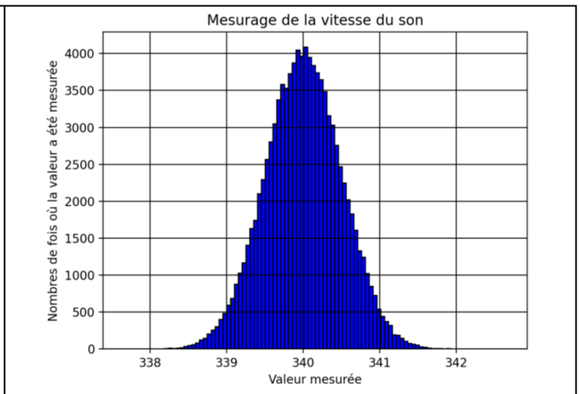


$N = 100\,000$

La courbe obtenue pour $N = 100\,000$ se rapproche le plus d'une distribution lisse, appelée « distribution gaussienne ». Cette courbe en forme de cloche est typique de nombreux mesurages. En physique, il est fréquent que les distributions aléatoires convergent vers une courbe gaussienne.
Reprenons la simulation avec $N = 100000$ mesures.



$u(x) = 0{,}1$



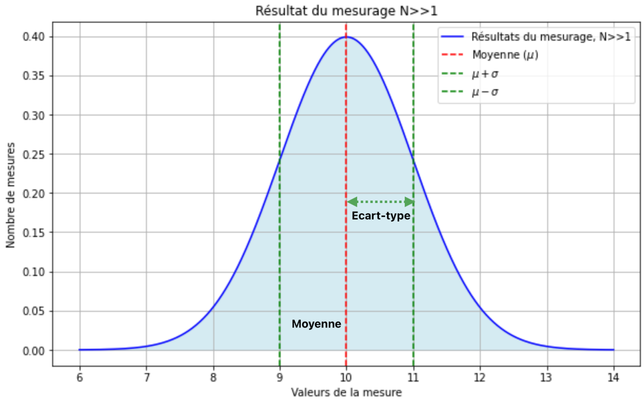
$u(x) = 0{,}5$

Nous retrouvons naturellement deux allures gaussiennes. Mais si nous regardons la largeur de la cloche, nous remarquons que plus l'incertitude-type est petite, plus la courbe est étroite.

L'incertitude type représente la largeur de cette courbe

Remarque

Nous sommes maintenant en mesure d'estimer l'incertitude-type de type A.
- On prendra comme valeur expérimentale la valeur moyenne de toutes les mesures du mesurage.
- L'incertitude-type du mesurage se calcule à partir de l'écart-type.



Nous pouvons calculer ces deux valeurs de manière arithmétique :

Méthode 2 : Calcul de moyenne et écart-type

On définit la moyenne arithmétique de l'ensemble, notée $\bar{x}$, ainsi :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

L'incertitude-type $u(x)$ pour une des mesures de cette série est évaluée en calculant son écart-type :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Bien heureusement pour nous, les calculatrices modernes permettent d'obtenir rapidement ces deux valeurs.

Propriété

Le résultat du mesurage se détermine à l'aide des relations suivantes :

$$x_{exp} = \bar{x} \quad \text{et} \quad u(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Exemple

Nous avons effectué $N = 10$ mesures de la résistance R du composant.
Les résultats des mesures sont les suivants (en ohms) :

$$R_1 = 100.1, \quad R_2 = 100.3, \quad R_3 = 100.2, \quad R_4 = 100.4, \quad R_5 = 100.0, \tag{1}$$

$$R_6 = 100.3, \quad R_7 = 100.2, \quad R_8 = 100.1, \quad R_9 = 100.4, \quad R_{10} = 100.2 \tag{2}$$

- Plusieurs mesures ont été faites, l'incertitude-type est du type A.

- Calculons la moyenne des mesures. La moyenne des mesures est donnée par :

$$\bar{R} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_i \tag{3}$$

En substituant les valeurs, nous obtenons :

$$\bar{R} = \frac{1}{10} \times 1002.2 = 100.22\,\Omega \tag{4}$$

● Calculons l'écart-type. L'écart-type des mesures est donné par :

$$\sigma(R) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(R_i - \bar{R})^2} \tag{5}$$

En substituant les valeurs, nous avons :

$$\sigma(R) = \sqrt{\frac{1}{9} \times 0.156} \approx 0.132\,\Omega \tag{6}$$

● On peut maintenant en déduire l'incertitude-type. L'incertitude type sur la moyenne est donnée par :

$$u(R) = \frac{\sigma(R)}{\sqrt{N}} \tag{7}$$

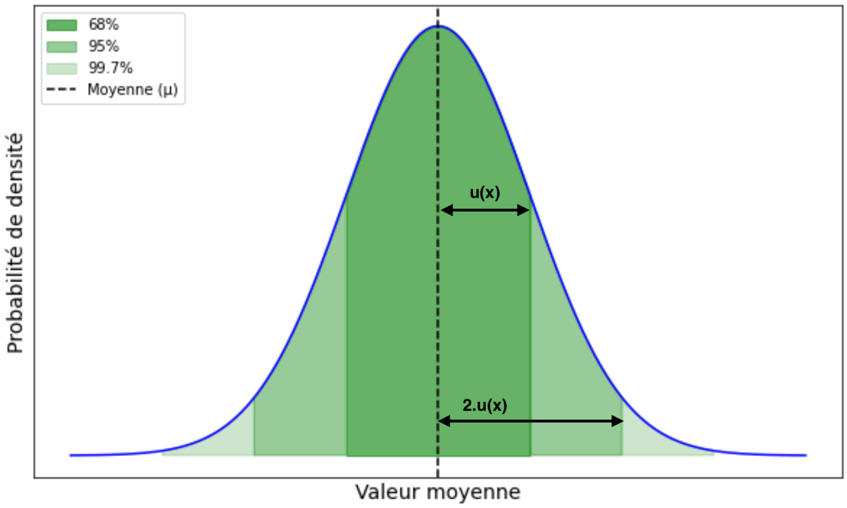
En substituant les valeurs, nous avons :

$$u(R) = \frac{0.132}{\sqrt{10}} \approx 0.042\,\Omega \tag{8}$$

Le résultat du mesurage de la résistance est donc :

$$R = 100.22\Omega \quad ; 0.04\,\Omega \tag{9}$$

A.2 Incertitude de type A et niveau de confiance



Il est possible pour l'expérimentateur de multiplier l'incertitude-type par un facteur de couverture (k) pour obtenir une incertitude élargie, ce qui permet d'évaluer le mesurage par rapport à un niveau de confiance spécifié.

— Pour un niveau de confiance de 95%, on utilise souvent $k = 2$.

— Pour un niveau de confiance de 99%, on utilise souvent $k = 3$.

Définition

On note Δx, l'incertitude élargie liée au mesurage de la grandeur x.

— Pour un niveau de confiance de 68%, $\Delta x = \pm u(x)$: il y a 68% de chance pour que la valeur mesurée se trouve dans l'intervalle

$$[\bar{x} - u(x); \quad \bar{x} + u(x)].$$

— Pour un niveau de confiance de 95%, $\Delta x = \pm 2u(x)$: il y a 95% de chance pour que la valeur mesurée se trouve dans l'intervalle

$$[\bar{x} - 2u(x); \quad \bar{x} + 2u(x)].$$

B Mesurage sans variabilité observée – type B (Approche probabiliste) :

Certaines expériences ne présentent pas de variabilité observable :

— En répétant la mesure, on obtient systématiquement le même résultat. Par exemple, lorsque l'on mesure la taille d'un objet avec la même règle graduée, la répétition de la mesure ne fournit pas de nouvelle information. Cela signifie simplement qu'à l'échelle de cette expérience, avec l'instrument de mesure choisi, la variabilité n'est pas détectable.

— En effectuant une unique mesure, car il n'est parfois pas possible ou souhaitable de répéter la mesure pour des raisons pratiques ou matérielles.

Cette absence de variabilité observable ne signifie pas qu'il n'y a pas de variabilité. Il est donc nécessaire d'estimer théoriquement la variabilité de la valeur mesurée sans pouvoir l'observer directement.

Définition

Dans le cas d'un mesurage sans variabilité observée, l'unique valeur mesurée accessible à l'expérimentateur est considérée comme la valeur expérimentale :

$$x_{\text{exp}} = x_{\text{mes}}$$

Pour estimer l'incertitude-type $u(x)$ de cette unique valeur mesurée, l'expérimentateur doit prendre en compte deux sources d'erreurs probables.

B.1 Précision des appareils du constructeur

Outilise la demi-étendue de l'intervalle, notée a.
Si la probabilité de mesurer une valeur entre $[x_{\text{mes}} - a; x_{\text{mes}} + a]$ est uniforme, alors l'incertitude-type se détermine grâce à la formule suivante :

$$u_{constructeur}(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Remarque

Cette formule n'est valable que si toutes les valeurs sont équiprobables. Si l'énoncé ne précise pas ce point, vous pouvez utiliser cette formule. Dans le cas contraire, une autre formule pour $u(x)$ vous sera précisée.

B.2 Obtenir la valeur de la demie-étendue

Avec un instrument de mesure gradué	Avec un instrument de mesure à affichage digital
La demi-étendue a est liée à la lecture. Sans aucune indication, on considère que la demi-étendue a est égale à la demi-graduation. En mesurant avec un règle dont la plus petite graduation est le millimètre, la demi-graduation est telle que : $a = 0,5mm$	Dans la notice de l'appareil, le constructeur indique une « précision » qui correspond à la demi-étendue a . La demi-étendue a est en général, égale à un pourcentage p de la valeur lue et un nombre N de digit (un digit correspond au dernier chiffre affiché). $a = p \times N \times valeurlue$

Table 1 – Obtention de la demie-étendue.

Attention !

Un instrument de mesure numérique n'induit pas nécessairement une demie-étendu plus faible qu'un instrument de mesure gradué.

B.3 Erreur de lecture de l'expérimentateur

L'incertitude liée à la lecture de l'expérimentateur est généralement due à la capacité limitée de l'œil humain à lire une échelle ou la limite d'un affichage numérique.

Type d'appareil	Formule	Exemple
Échelle analogique	$u_{\text{lecture}} = \frac{1}{2} \times$ la plus petite division	Pour une règle graduée en millimètres : $u_{\text{lecture}} = \frac{1}{2} \times 1\,\text{mm} = 0{,}5\,\text{mm}$
Affichage numérique	$u_{\text{lecture}} = \frac{1}{2} \times$ la plus petite unité affichée	Pour un voltmètre avec une précision de 0,01 V : $u_{\text{lecture}} = \frac{1}{2} \times 0{,}01\,\text{V} = 0{,}005\,\text{V}$

Table 2 – Incertitude liée à la lecture selon le type d'appareil

C Les incertitudes types composées

C.1 Loi de propagation des incertitudes

On suppose que le mesurage d'une grandeur y est obtenu à partir des mesurages des grandeurs (supposées indépendantes) x_1, x_2, etc.
L'incertitude-type sur y, $u(y)$, se calcule à partir des incertitudes-type $u(x_1)$, $u(x_2)$, etc.

Formule littérale entre les différentes grandeurs	Formule pour déterminer l'incertitude-type de la grandeur :
$y = \lambda \times x \quad (\lambda \text{ constante})$	$u(y) = \lvert\lambda\rvert \times u(x)$
$y = a \times x_1 + b \times x_2$ ou $y = a \times x_1 - b \times x_2$	$u(y) = \sqrt{\left(a \times u(x_1)\right)^2 + \left(b \times u(x_2)\right)^2}$
$y = \frac{x_1}{x_2}$ ou $y = x_1 \times x_2$	$u(y) = \lvert y\rvert \times \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$
$y = \lambda \times {x_1}^a \times {x_2}^b$	$u(y) = \lvert y\rvert \sqrt{\left(a \times \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(b \times \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$

Figure 1 – Loi de propagation des incertitudes

C.2 Exemple de mesurage de longeur d'une fibre optique.

Un expérimentateur souhaite mesurer la distance d'une fibre optique en utilisant un réflectomètre optique dans le domaine temporel (OTDR).

Cet appareil envoie une impulsion lumineuse dans la fibre et mesure le temps que met l'impulsion pour revenir après réflexion, permettant ainsi de calculer la distance parcourue par l'impulsion.

Données

L'expérimentateur lit une distance de $350{,}5\,\mathrm{m}$ sur l'écran de l'OTDR.
L'OTDR utilisé par l'expérimentateur a les caractéristiques suivantes :

— Précision de l'appareil : $\pm 1\,\mathrm{m}$

— Résolution de l'écran : $0{,}5\,\mathrm{m}$

Ces deux sources principales d'erreurs seront les seules à être prises en compte pour estimer l'incertitude totale sur la mesure.

1. La précision de l'appareil : L'OTDR a une précision donnée par le constructeur de $\pm 1\,\mathrm{m}$. Il suffit donc de diviser cette valeur par $\sqrt{3}$ pour obtenir l'incertitude constructeur, soit :

$$u_{\text{constructeur}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577\,\mathrm{m}$$

2. La précision de la lecture de l'expérimentateur : L'incertitude liée à la lecture sur l'écran est de la moitié de la résolution, soit :

$$u_{\text{lecture}} = \frac{1}{2} \times 0{,}5\,\mathrm{m} = 0{,}25\,\mathrm{m}$$

L'incertitude totale sur la mesure est la combinaison quadratique des incertitudes dues à la précision de l'appareil et à la lecture de l'expérimentateur :

$$u_{\text{totale}} = \sqrt{u^2_{\text{constructeur}} + u^2_{\text{lecture}}}$$

$$u_{\text{totale}} = \sqrt{(0{,}577\,)^2 + (0{,}25\,)^2}$$

$$u_{\text{totale}} = \sqrt{(0{,}577)^2 + (0{,}25)^2} \approx 0{,}629$$

La distance mesurée de la fibre optique est donc donnée par :

$$d = (350{,}5 \pm 0{,}7)\,\mathrm{m}$$

Cela signifie que la distance de la fibre est comprise entre $349{,}8\,\mathrm{m}$ et $351{,}2\,\mathrm{m}$.

Remarque

Il est souvent utile de calculer séparément l'incertitude due au constructeur, notée $u_{\text{constructeur}}$, et l'incertitude de lecture, notée u_{lecture}. Dans certains cas, l'une de ces sources d'incertitude peut être négligeable par rapport à l'autre. Cela simplifie l'analyse en permettant de se passer de la composition des incertitudes.

III Compatibilité de mesurages et exactitude d'un mesurage

A Comparer le résultat d'un mesurage au résultat d'un autre mesurage : l'écart normalisé

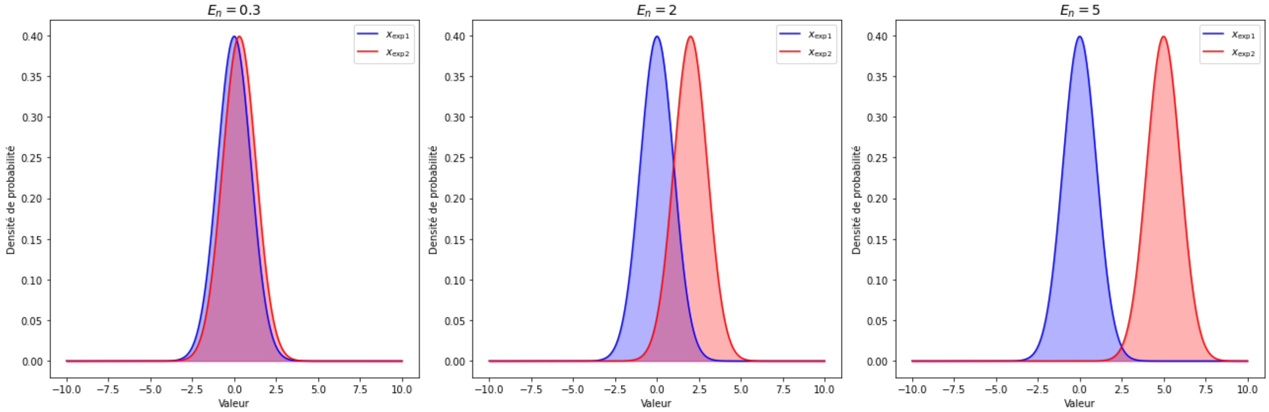
Définition

L'écart normalisé, noté E_n, entre deux processus de mesure donnant les valeurs expérimentales x_{exp1} et x_{exp2} et des incertitudes-type $u(x_{\text{exp1}})$ et $u(x_{\text{exp2}})$ est défini par :

$$E_n = \frac{|x_{\text{exp1}} - x_{\text{exp2}}|}{\sqrt{u(x_{\text{exp1}})^2 + u(x_{\text{exp2}})^2}}$$

Par convention, on qualifie souvent deux résultats de « compatibles » si leur écart normalisé vérifie la propriété $E_n \leq 2$.

✔ Exemple



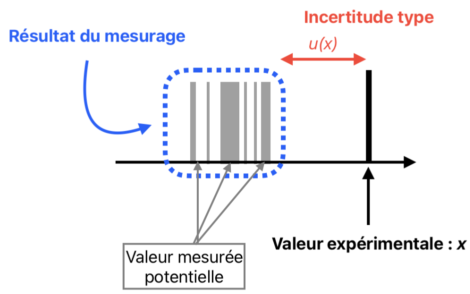
Nous pouvons observer que pour un écart normalisé supérieur à 2, les deux résultats ne sont pas compatibles.

B Notion de justesse, de fidélité et d'exactitude d'un mesurage :

B.1 Fidélité

Définition

Un mesurage est fidèle si l'ensemble des valeurs potentiellement mesurées par des mesurages répétés de la même grandeur se répartissent sur un « intervalle » relativement étroit.



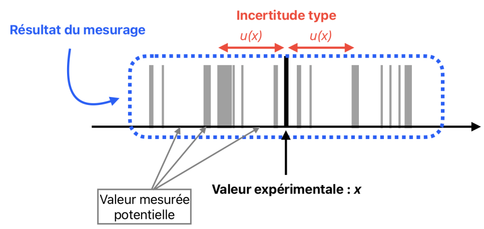
Propriété

La fidélité d'un mesurage est évaluée à l'aide de l'incertitude-type relative $\frac{u(x)}{|x|}$. Plus l'incertitude-type relative d'un mesurage est faible, plus ce mesurage est fidèle.

B.2 Justesse

Définition

Un mesurage est juste si la moyenne d'un nombre infini de valeurs potentiellement mesurées est proche de la valeur de référence.



Propriété

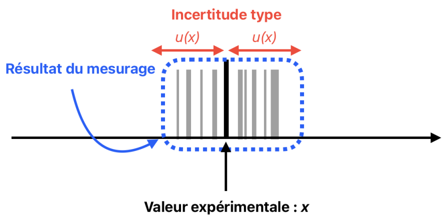
On définit le z-score comme l'écart absolu entre la valeur expérimentale x_{exp} et la valeur de référence x_{ref}, divisé par l'incertitude-type :

$$z = \frac{|x_{\text{exp}} - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$$

Lorsque $z < 2$, on considère que le résultat du mesurage est compatible (et donc « juste ») avec la valeur de référence.
Lorsque $z \geq 2$, on considère qu'il ne l'est pas.

Remarque

Un mesurage est exact s'il est juste et fidèle.



B.3 Exemple du mesurage de la fibre optique

— Calcul du z-score (justesse) :
Supposons que la longueur attendue (ou de référence) de la fibre optique soit

$$d_{\text{ref}} = 350,0\,\text{m}.$$

Le z-score est calculé comme suit :

$$z = \frac{d_{\text{mesuré}} - d_{\text{ref}}}{u_{\text{totale}}}$$

Application au cas présent :

$$z = \frac{350,5 - 350,0}{0,7} \approx 0,8.$$

Puisque le z-score obtenu est $\approx 0,8$, qui est bien inférieur à 2, on peut conclure que la mesure de la longueur de la fibre optique est compatible avec la valeur de référence.

— Calcul de l'incertitude-type relative (fidélité) :
L'incertitude-type relative est calculé comme suit :

$$u_r = \frac{u_{\text{mesure}}}{d_{\text{mesuré}}}$$

Application au cas présent :

$$u_r = \frac{0,7}{350,5} \approx 0,0001.$$

Cette valeur étant très faible ($< 0,1\%$), la mesure est fidèle.

— Au bilan : Le mesurage est juste et fidèle, il est donc exact.

IV Bilan

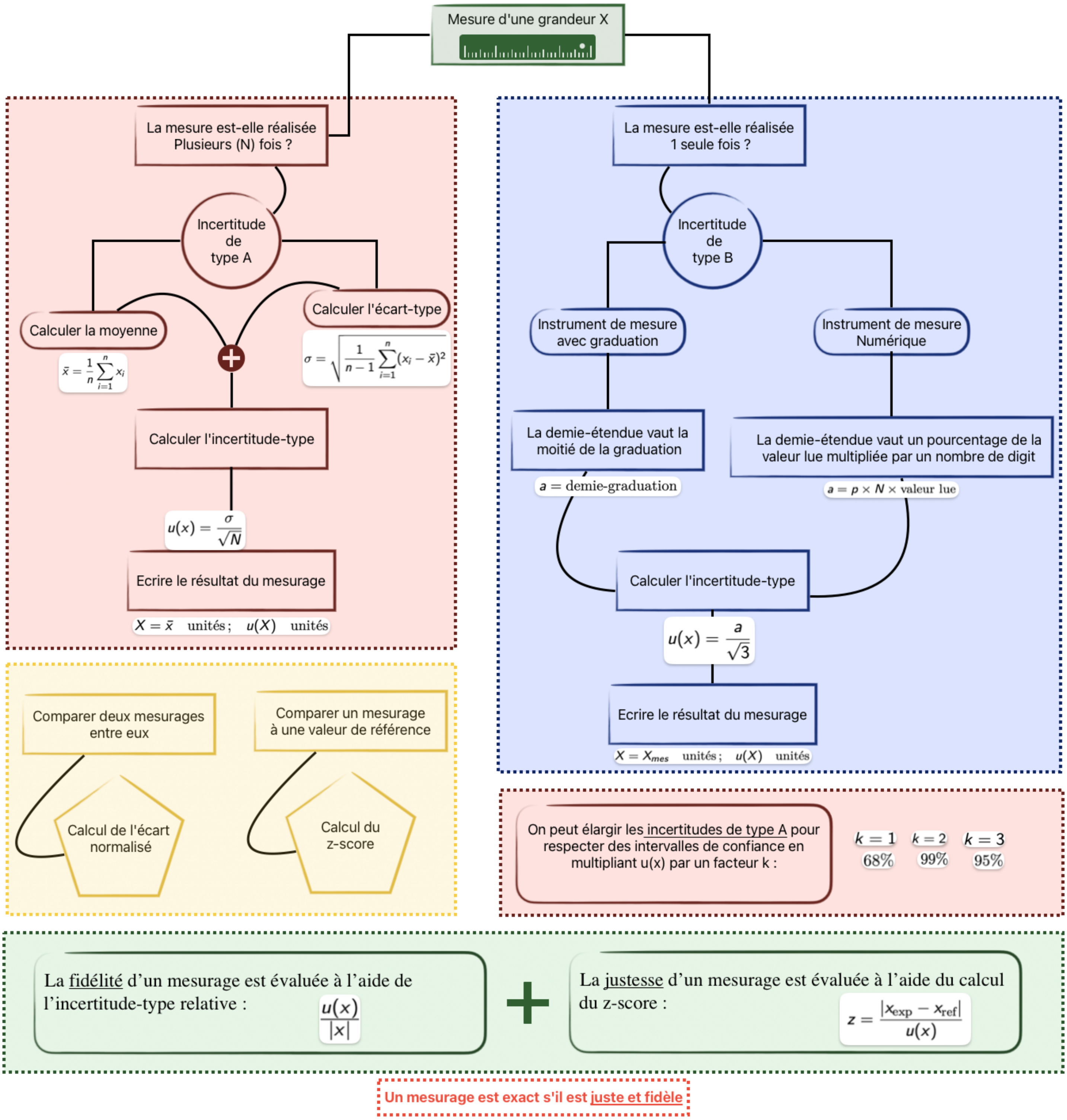


Figure 2 – Bilan

Attention !

Ce bilan proposé ne permet pas de se séparer du cours.