Impédance complexe des dipôles passifs

Plan du cours

Exercices

Voir fiche TD

Voir Activité et Application

Tous les cours en ligne !

PhysicSensei.fr

I Conditions d'application et prérequis mathématiques

A Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

Propriété

L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (en abrégé ARQS) est applicable pour l'étude d'un courant électrique si la longueur L des fils et le temps caractéristique de variation T sont tels que :

$$T >> \frac{L}{c}$$

où $c = 3,00.10^8 m.s^1$ est la vitesse de la lumière dans le vide.

Exemple

L'ARQS est-elle valable pour une ligne à haute tension EDF, d'une longueur $L = 300km$, qui sépare une centrale électrique d'un particulier ? Le temps carac- téristique de variation de la tension est l'inverse de la fréquence EDF, $f = 50Hz$.

$L = 300km << T \times c = \frac{c}{f} = \frac{3.10^8}{50} = 6 \times 10^3 km$
Donc l'ARQS est vérifiée.

L'ARQS est-elle valable pour une antenne FM, de longueur 1m alimentée par un courant de fréquence f = 100 MHz ?

$L = 1 << T \times c = \frac{c}{f} = \frac{3.10^8}{100 \times 10^6} = 3m$
Donc l'ARQS n'est pas vérifiée.

Attention !

L'étude de l'électrocinétique se place dans le cadre de l'ARQS (régime lentement variable). En TP, pour que l'approximation reste valide, il faudra utiliser des fréquences éloignées du GHz.

B Régime transitoire et régime sinusoïdal forcé

Le régime transitoire et le régime sinusoïdal forcé représentent deux phases distinctes de la réponse d'un système oscillant soumis à une excitation.

Définition

Le régime transitoire est caractéristique de l'évolution initiale du système, lorsqu'il passe de son état initial (souvent au repos) à un état stable. Il est temporaire et tend à disparaître au fil du temps.

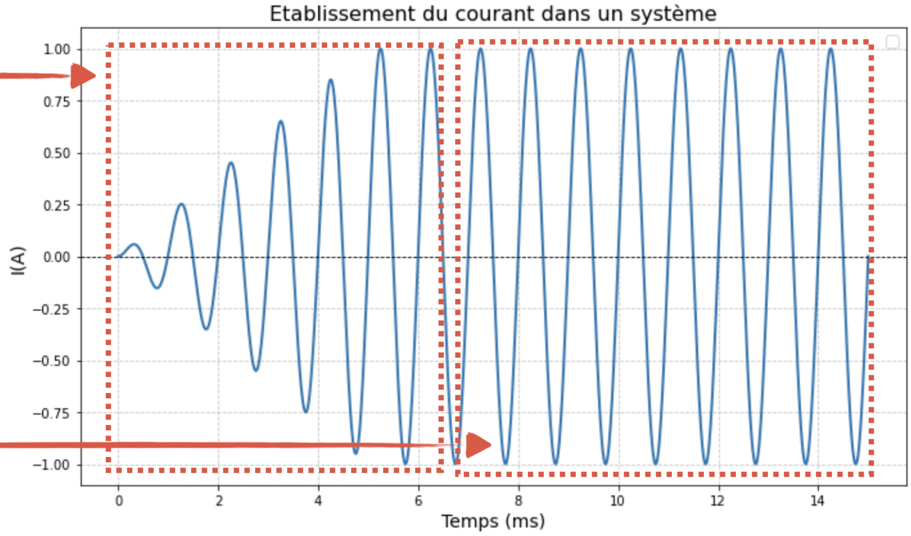
Définition

Une fois le régime transitoire dissipé, le système atteint une réponse stable dictée uniquement par l'excitation extérieure (ici une force sinusoïdale). Le régime sinusoïdal forcé est caractérisé par des oscillations régulières à la même fréquence que l'excitation, avec une amplitude et une phase dépendant des propriétés du système.

Compléter le schéma suivant :

....

....



Dans la suite du chapitre, nous étudierons les systèmes en régime sinusoïdal forcé.

C Les nombres complexes

Attention !

L'utilisation des nombres complexes en électrocinétique ne sert que d'intermédiaire de calcul. L'ensemble des informations physiques sur le signal électrique se trouve dans la partie réelle du signal.

Formule

Un nombre complexe z peut s'écrire sous la forme :

$$z = a + i \times b$$

où

— a la partie reelle (Re)

— b la partie imaginaire (Im).

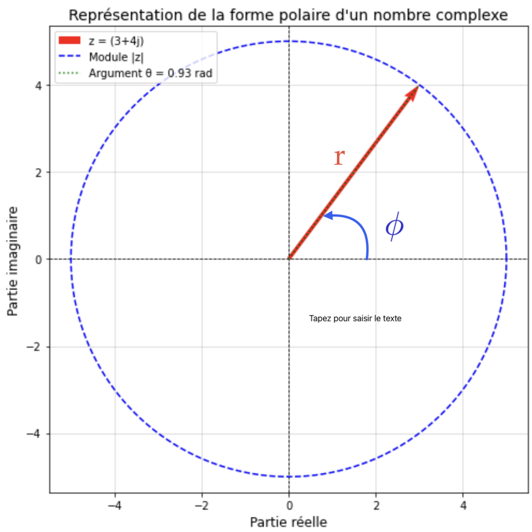
Propriété

Le module de z, noté $|z|$, est la distance entre le point correspondant à z dans le plan complexe et l'origine. Il se calcule comme suit :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

L'argument de z, noté $\arg(z)$, est l'angle ϕ (en radians) formé entre l'axe réel positif et le vecteur représentant z dans le plan complexe. Il peut être calculé par :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Im}{Re}\right),$$



Formule

Avec ces deux notions, z peut également s'exprimer sous sa forme polaire :

$$z = |z|e^{i\phi},$$

où $|z|$ est le module et ϕ l'argument.
Une animation sur les nombres complexes est disponible en ligne !

Remarque

En électricité, le courant est décrit avec la lettre i. Pour éviter toutes confusions entre le i des mathématiques complexes, nous le notons j tel que $j^2 = -1$.

II Impédance électrique complexe

A Signal complexe associé à un signal sinusoïdal

Formule

On considère un signal sinusoïdal $x(t) = X_0 \times cos(\omega t +)$ avec $\omega = 2 \times \pi \times f$.

La notation x est ici neutre ; elle désigne un signal qui peut être une tension ou un courant, et qui peut être aussi bien le signal d'entrée d'un système que le signal de sortie.

Le signal complexe associé à $x(t)$ s'écrit avec la formule :

$$\underline{x(t)} = X_0 \times e^{j(\omega t + \phi)} = X_0 \times e^{j\omega t} \times e^{j\phi} = \underline{X_0} e^{j\omega t}$$

Où

- $\underline{X_0}$ est l'amplitude complèxe.
- X_0 est l'amplitude.

Exemple

Prenons un signal avec les caractéristiques suivantes :

— $A = 2$,

— $\omega = 2\pi \times 50$ rad/s (fréquence de 50 Hz),

— $\phi = \frac{\pi}{4}$ rad.

Le signal réel est alors :

$$s(t) = 2\cos(2\pi \times 50 \times t + \frac{\pi}{4}).$$

Le signal complexe est quand à lui :

$$z(t) = 2e^{i(2\pi\times 50\times t + \frac{\pi}{4})} = 2e^{(\frac{\pi}{4})}e^{i(2\pi\times 50\times t)}.$$

B Impédance d'un système

B.1 Cas général

Définition

L'impédance d'un dipôle est une grandeur complexe, dont la partie réelle correspond a sa résistance (fixe, notée R), et sa partie imaginaire, la réactance (variant en fonction de la fréquence, notée X).

$$Z = R + jX$$

Formule

En régime sinusoïdal forcé, on définit l'impédance électrique complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

où

— $\underline{Z}$ est l'impédance en Ω

— $\underline{u}$ est la tension en V

— $\underline{i}$ est le courant en A

Propriété

L'ensemble de l'information du signal réel se trouve dans l'amplitude complexe. Prenant le module de $\underline{X_0}$ on obtient l'amplitude et en prenant l'argument de $\underline{X_0}$, nous avons le déphasage.

Démonstration : En prenant le courant I comme origine des phases :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

Donc :

$$\underline{Z} = \frac{U_m \times e^{j(\omega t + \phi)}}{I_m \times e^{j\omega t}}$$

On développe la première exponentielle :

$$\underline{Z} = \frac{U_m \times e^{j\omega t} \times e^{j\phi}}{I_m \times e^{j\omega t}}$$

On simplifie par : $e^{j\omega t}$

$$\underline{Z} = \frac{U_m \times e^{j\phi}}{I_m}$$

On réarrange pour faire apparaître la forme polaire d'un nombre complexe :

$$\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m}e^{j\phi} = |\underline{Z}|e^{i\phi},$$

B.2 La bobine idéale

Rappel

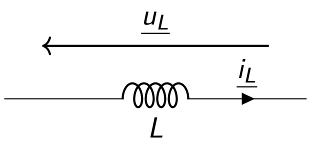
En mathématique :

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = cos(\frac{\pi}{2}) + jsin(\frac{\pi}{2})$$

Or : $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ Donc :

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

Définition



La bobine idéale est un dipôle passif, purement inductif caractérisé par une impédance complexe qui est :

$$\underline{Z_L} = 0 + jL\omega$$

- $\underline{Z_L}$ est l'impédance en Ω
- ω est la pulsation en rad
- L est l'inductance de la bobine en Henry (H)

Propriété

Appliquons la méthode d'identification :

$$\underline{Z_L} = jL\omega = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}} = |\underline{Z}|e^{i\phi}$$

Donc :

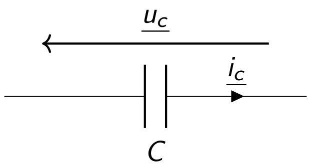
- $|\underline{Z}| = L\omega$
- $\phi = \frac{\pi}{2}$

On peut donc affirmer deux choses :

- La bobine introduit un déphasage entre le courant et la tension qui vaut $+\frac{\pi}{2}$. Cela veut dire que la tension est en avance sur le courant.
- Plus la fréquence augmente, plus le rapport $\frac{U_m}{I_m}$ augmente également. Ainsi, aux hautes fréquences, la bobine s'oppose au passage du courant.

B.3 Le condensateur idéal

Définition



Le condensateur idéal est un dipôle passif purement capacitif caractérisé par une impédance complexe qui est :

$$\underline{Z_c} = 0 + \frac{1}{jC\omega}$$

- $\underline{Z_c}$ est l'impédance en Ω
- ω est la pulsation en rad
- C est la capacité du condensateur en Farad (F)

Propriété

Appliquons la méthode d'identification :

$$\underline{Z_c} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{C\omega e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}} = |\underline{Z}|e^{i\phi}$$

Donc :
- $|\underline{Z}| = \frac{1}{C\omega}$
- $\phi = -\frac{\pi}{2}$

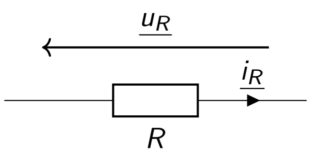
On peut donc affirmer deux choses :
- Le condensateur introduit un déphasage entre le courant et la tension qui vaut $-\frac{\pi}{2}$. Cela veut dire que la tension est en retard sur le courant.
- Plus la fréquence augmente, plus le rapport $\frac{U_m}{I_m}$ diminue. Ainsi, aux hautes fréquences, la condensateur laisse passer le courant.

Remarque

La bobine idéale et le condensateur idéal ne sont que des modèles théoriques, dans la réalité ils présentent également une partie résistive.

B.4 Le conducteur ohmique - la résistance

Définition



Le conducteur ohmique est un dipôle passif purement résistif caractérisé par une impédance complexe qui est :

$$\underline{Z_R} = R + j \times 0$$

- $\underline{Z_R}$ est l'impédance en Ω
- ω est la pulsation en rad
- R est la résistance en (Ω)

Propriété

Appliquons la méthode d'identification :

$$\underline{Z_R} = R = R \times e^{j0}$$

Donc :
- $|\underline{Z_R}| = R$
- $\phi = 0$

On peut donc affirmer deux choses :
- La résistance n'introduit pas de déphasage entre le courant et la tension.
- Le rapport $\frac{U_m}{I_m}$ ne dépend pas de la fréquence des signaux (dans l'approximation de l'ARQS).

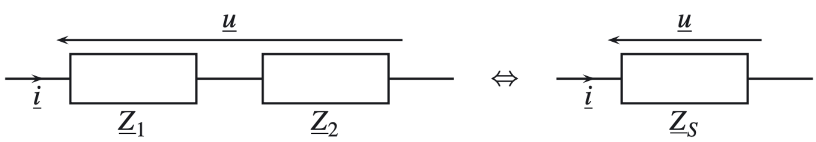
C Association d'impédances

C.1 Impédance équivalente

La relation qui relie les tensions complexes et les intensités complexes aux bornes d'un dipôle ($\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$) est analogue à la loi d'Ohm pour une résistance en courant continu ($U = RI$). Les lois d'association des impédances sont donc analogues à celles des résistances.

Propriété

Dans une association d'impédance en série, plusieurs résistances sont connectées l'une après l'autre, de sorte que le courant qui traverse chacune d'entre elles est le même.

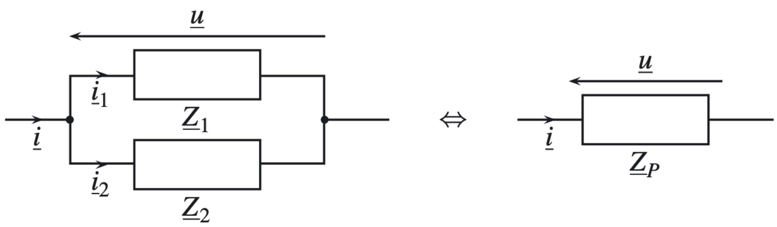


L'impédance équivalente $\underline{Z_s}$ pour des impédances en série est la somme des valeurs individuelles des impédances :

$$\underline{Z_s} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \dots$$

Propriété

Dans une association d'impédances en parallèle, les extrémités de toutes les impédances sont connectées entre elles.



L'impédance équivalente $\underline{Z_p}$ pour des impédances en parallèle est calculée en utilisant la formule inverse de la somme des inverses des résistances individuelles :

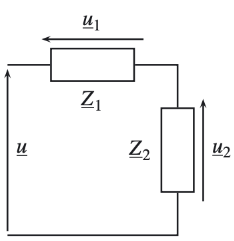
$$\frac{1}{\underline{Z_p}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} + \dots$$

C.2 Pont diviseur de tension

Définition

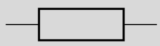
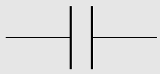
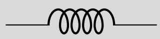
La formule du diviseur de tension est encore valable avec les impédances complexes, avec la même hypothèse d'un courant identique dans les deux dipôles :

$$\underline{u_2} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \times \underline{u}$$



III Comportement asymptotique

Rappel

Composant	Symbole	Impédance (Z)
Résistance	R 	$Z_R = R$
Condensateur	C 	$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$
Bobine	L 	$Z_L = j\omega L$

Le module de l'amplitude complèxe est égal au rapport de l'amplitude de la tension sur l'amplitude du courant : $|\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m}$

Définition

Le comportement asymptotique d'une fonction ou d'un système décrit comment celui-ci se comporte lorsque sa variable (ou un paramètre du système) tend vers une valeur limite, souvent infinie ou zéro.

Attention !

Nous considérons dans cette partie des signaux de hautes fréquences, mais nous restons dans l'approximation ARQS. Quand nous considérons des signaux de basses fréquences, nous sommes toujours en régime sinusoïdal forcé.

Exercice 1 La bobine idéale

Considérons une bobine idéale d'inductance $L = 10\,\text{mH}$.

Q1 Exprimez l'impédance Z_L en fonction de la fréquence f.

Q2 Calculez le module de l'impédance $|Z_L|$ pour les fréquences suivantes, calculer également l'amplitude de l'intensité du courant parcourant la bobine :

$$f = 10\,\text{mHz}, \quad f = 1\,\text{kHz}, \quad f = 1\,\text{MHz}.$$

Q3 Étudiez le comportement asymptotique de $|Z_L|$ lorsque la fréquence f tend vers l'infini ($f \to \infty$).

Q4 Interprétez ces résultats d'un point de vue physique.

Exercice 2 Le condensateur idéal

Considérons un condensateur idéal de capacité $C = 100\,\mu\text{F}$.

Q1 Exprimez l'impédance Z_C en fonction de la fréquence f.

Q2 Calculez le module de l'impédance $|Z_C|$ pour les fréquences suivantes, et déterminez également l'amplitude de l'intensité du courant traversant le condensateur :

$$f = 10\,\text{mHz}, \quad f = 1\,\text{kHz}, \quad f = 1\,\text{MHz}.$$

Q3 Étudiez le comportement asymptotique de $|Z_C|$ lorsque la fréquence f tend vers zéro ($f \to 0$) et vers l'infini ($f \to \infty$).

Q4 Interprétez ces résultats d'un point de vue physique.